

成都市 2023 级高中毕业班第一次诊断性检测

数学参考答案及评分意见

一、选择题:(每小题 5 分,共 40 分)

1. A; 2. D; 3. B; 4. B; 5. C; 6. C; 7. B; 8. A.

二、选择题:(每小题 6 分,共 18 分)

9. ABD; 10. AC; 11. ABC.

三、填空题:(每小题 5 分,共 15 分)

12. 25; 13. $(-2, 1)$; 14. 20π .

四、解答题:(共 77 分)

15. 解:(1)由 $|A_1A_2|=2a=4$,得 $a=2$3 分

又离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $c=\sqrt{3}$, $b^2=a^2-c^2=1$.

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$6 分

(2)设 P, Q 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} 2y=x-1, \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$ 消去 y ,得 $2x^2-2x-3=0$8 分

$\Delta=4+24=28>0$,所以 $x_1+x_2=1, x_1x_2=-\frac{3}{2}$9 分

所以 $\overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{A_1Q} = (x_1+2)(x_2+2) + y_1y_2 = (x_1+2)(x_2+2) + \frac{x_1-1}{2} \cdot \frac{x_2-1}{2}$
.....11 分

$$= \frac{5}{4}x_1x_2 + \frac{7}{4}(x_1+x_2) + 4 + \frac{1}{4} = \frac{33}{8}.$$

所以 $\overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{A_1Q}$ 的值为 $\frac{33}{8}$13 分

16. 解:(1)由 $\sin A + \cos A = \sqrt{2}$,得 $\sqrt{2} \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$,即 $\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) = 1$1 分

因为 $A \in (0, \pi)$,所以 $A + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$. 所以 $A + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. 所以 $A = \frac{\pi}{4}$3 分

由 $\sin B + \cos 2C = 0$,且 $2C = 2(\pi - A - B) = \frac{3\pi}{2} - 2B$,

得 $\sin B + \cos(\frac{3\pi}{2} - 2B) = 0$4 分

则 $\sin B - \sin 2B = 0$, 即 $\sin B(1 - 2\cos B) = 0$6 分

因为 $\sin B > 0$, 则 $\cos B = \frac{1}{2}$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$8 分

(2) 由 (1) 可得 $C = \frac{5\pi}{12}$10 分

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,

因为 $a = 2$, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{3} + 1$13 分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$15 分

17. 解: (1) 对于游戏一, 设 $A =$ “第二次摸到白球”,

则 $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;2 分

对于游戏二, 设 $A_1 =$ “第一次摸到白球”, $A_2 =$ “第二次摸到白球”,

则 $P(A_2) = P(A_1 A_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$4 分

(2) 对于游戏一, X 的可能取值为 $0, 1, 2$, X 的分布列为:

$$P(X=0) = C_2^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, P(X=1) = C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2},$$

$$P(X=2) = C_2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}. \quad \text{.....6 分}$$

对于游戏二, Y 的可能取值为 $0, 1, 2$, Y 的分布列为:

$$P(Y=0) = \frac{C_2^0 C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}, P(Y=1) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{3}, P(Y=2) = \frac{C_2^2 C_2^0}{C_4^2} = \frac{1}{6}. \quad \text{.....8 分}$$

因为游戏一与游戏二的结果相互独立,

$$\text{所以 } P(X=Y) = P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=2)$$

$$= P(X=0)P(Y=0) + P(X=1)P(Y=1) + P(X=2)P(Y=2)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{12}. \quad \text{.....10 分}$$

$$(3) \text{ 由 (2) 知 } H(X) = -\sum_{i=0}^2 P(X=i) \log_2 P(X=i)$$

$$= -\left(\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4}\right) = -\left[\frac{1}{4} \times (-2) + \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{4} \times (-2)\right] = \frac{3}{2};$$

.....11 分

$$\begin{aligned} \text{同理 } H(Y) &= -\sum_{i=0}^2 P(Y=i) \log_2 P(Y=i) = -\left(\frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \log_2 \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6}\right) \\ &= -\left[\frac{1}{6} \times (-\log_2 3 - 1) + \frac{2}{3} \times (1 - \log_2 3) + \frac{1}{6} \times (-\log_2 3 - 1)\right] = \log_2 3 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

.....12 分

$$\begin{aligned} \text{因为 } H(X) - H(Y) &= \frac{3}{2} - \log_2 3 + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} - \log_2 3 = \frac{1}{6} (\log_2 2^{11} - \log_2 3^6) \\ &= \frac{1}{6} \log_2 \frac{2^{11}}{3^6} > 0, \end{aligned}$$

所以 $H(X) > H(Y)$, 故游戏一的“不确定性”更高.

.....15 分

18. 解: (1) 因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $AD \parallel BC$.

.....2 分

因为 $BC \subset$ 平面 BCE , $AD \not\subset$ 平面 BCE ,

所以 $AD \parallel$ 平面 BCE .

.....3 分

(2) 设 BD 交 AC 于点 O , 连接 EO ,

因为 $EC = EA$, $BA = BC$, O 是 AC 中点, 所以 $AC \perp EO$, $AC \perp BO$.

.....5 分

因为 $EO \cap BO = O$, $EO \subset$ 平面 BDE , $BO \subset$ 平面 BDE , 所以 $AC \perp$ 平面 BDE .

.....7 分

因为 $AC \subset$ 平面 ACE , 所以平面 $ACE \perp$ 平面 BDE .

.....8 分

(3) 取 EB 中点 M , 连接 AM , CM , 易得

$\triangle AEB \cong \triangle CEB$.

设 $\angle AMC = \theta$, $\angle EOB = \alpha$,

因为 $EA = AB = \sqrt{2}$, 且 $EA \perp AB$, 所以 $EB = 2$, $AM = 1$.

因为 $AM \perp BE$, $CM \perp BE$, $AM \cap CM = M$,

所以 $BE \perp$ 平面 ACM .

故 $V_{E-ABCD} = 2V_{E-ABC}$

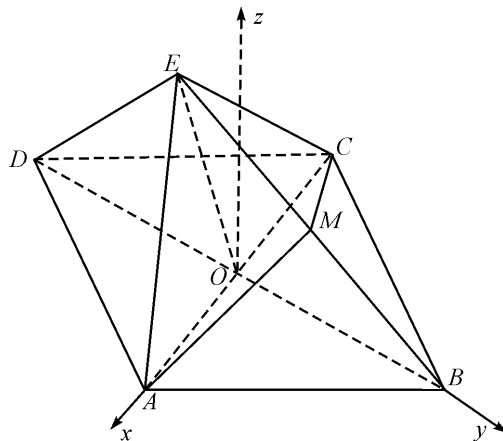
$$= 2 \times \frac{1}{3} \times BE \times S_{\triangle ACM} = \frac{2}{3} \sin \theta \leq \frac{1}{3},$$

$$\text{即 } \sin \theta \leq \frac{1}{2}.$$

.....9 分

作 $Oz \perp$ 平面 $ABCD$, 以 O 为原点, OA, OB, Oz 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 设 $OA = a, OB = OE = b$, 则 $A(a, 0, 0), C(-a, 0, 0), D(0, -b, 0), E(0, b \cos \alpha, b \sin \alpha)$,

.....10 分



所以 $\overrightarrow{AC} = (-2a, 0, 0), \overrightarrow{CE} = (a, b \cos \alpha, b \sin \alpha),$

$\overrightarrow{AD} = (-a, -b, 0), \overrightarrow{DE} = (0, b + b \cos \alpha, b \sin \alpha).$

设平面 ACE 的法向量 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, 则
$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC} = -2ax_1 = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{CE} = ax_1 + by_1 \cos \alpha + bz_1 \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

取 $z_1 = -\cos \alpha$, 可得平面 ACE 的一个法向量 $\mathbf{n}_1 = (0, \sin \alpha, -\cos \alpha).$ 11 分

设平面 ADE 的法向量 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则
$$\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AD} = -ax_2 - by_2 = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DE} = by_2(1 + \cos \alpha) + bz_2 \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

取 $z_2 = 1$, 可得平面 ADE 的一个法向量 $\mathbf{n}_2 = \left(\frac{b \sin \alpha}{a(1 + \cos \alpha)}, -\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, 1 \right).$ 12 分

设平面 ACE 与平面 ADE 夹角为 β ,

在三角形 AMC 中, $a = \sin \frac{\theta}{2}$, 且由 $a^2 + b^2 = 2$, 则 $b^2 = 2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}.$

在三角形 EOB 中, 由余弦定理可得 $2b^2 \cos \alpha = 2b^2 - 4$, 则 $\cos \alpha = \frac{-\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$

因为 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = -\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} - \cos \alpha = -1$, 且 $|\mathbf{n}_1| = 1$,

$$|\mathbf{n}_2|^2 = 1 + \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\sin^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2} = 1 + \left(1 + \frac{2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$= 1 + \frac{2}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{2}{2 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}} = 1 + \frac{2}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 1 + \frac{8}{\sin^2 \theta} \geq 33. \quad \text{.....16 分}$$

所以 $\cos \beta = \left| \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} \right| = \frac{1}{|\mathbf{n}_2|} \leq \frac{1}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{33}}{33}.$

综上, 平面 ACE 与平面 ADE 夹角的余弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{33}}{33}.$ 17 分

19. 解: (1) 由题意可得 $f'_n(x) = C_n^1 + C_n^2 \frac{x}{2} + C_n^3 \frac{x^2}{3} + \dots + C_n^n \frac{x^{n-1}}{n}.$ 2 分

当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, $f'_n(x) > 0$, 故 $f_n(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 单调递增.

因为 $f_n(0) = -1 < 0$, 且 $f_n(\frac{1}{2}) = -1 + \frac{C_n^1}{2} + \dots + C_n^n \frac{(\frac{1}{2})^n}{n^2} > -1 + \frac{C_n^1}{2} \geq -1 + \frac{2}{2} = 0,$

所以对每个 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$, 存在唯一的 $x_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 满足 $f_n(x_n) = 0$4 分

(2) 由题意可得当 $x > -1, 2x + \frac{x^2}{4} \geq a \ln(x+1)$ 恒成立,

$$\text{设 } g(x) = \frac{x^2}{4} + 2x - a \ln(x+1),$$

当 $a \leq 0$ 时, 由 $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{16} + a \ln 2 < 0$, 不合题意;5 分

当 $a > 0$ 时, $g'(x) = \frac{x}{2} + 2 - \frac{a}{x+1}$, 则 $g'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 单调递增.

且 $x \rightarrow -1, g'(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty, g'(x) \rightarrow +\infty$.

① $0 < a < 2$ 时, 由 $g'(0) = 2 - a > 0$, 故存在 $x_0 \in (-1, 0)$, 使 $g'(x_0) = 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[x_0, 0)$ 单调递增. 所以 $g(x_0) < g(0) = 0$, 矛盾;7 分

② $a > 2$ 时, 由 $g'(0) = 2 - a < 0$, 故存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使 $g'(x_0) = 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, x_0]$ 单调递减. 所以 $g(x_0) < g(0) = 0$, 矛盾;9 分

③ $a = 2$ 时, 由 $g'(0) = 2 - a = 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

所以 $g(x) \geq g(0) = 0$, 不等式成立, 满足题意;

综上所述, $a = 2$10 分

$$(3) \text{ 由题意可得 } f'_n(x) = C_n^1 + C_n^2 \frac{x}{2} + C_n^3 \frac{x^2}{3} + \cdots + C_n^n \frac{x^{n-1}}{n},$$

$$\text{则 } f'_n(-1) = C_n^1 + C_n^2 \frac{(-1)^1}{2} + C_n^3 \frac{(-1)^2}{3} + \cdots + C_n^n \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\text{要证 } f'_n(-1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$\text{只需证明: } C_n^1 + C_n^2 \frac{(-1)^1}{2} + C_n^3 \frac{(-1)^2}{3} + \cdots + C_n^n \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

$$\text{设 } a_n = C_n^1 + C_n^2 \frac{(-1)^1}{2} + C_n^3 \frac{(-1)^2}{3} + \cdots + C_n^n \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) \frac{(-1)^{k-1}}{k} + C_{n+1}^{n+1} \frac{(-1)^n}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \end{aligned}$$

$$\text{由此可得 } a_{n+1} = a_n + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ ①.} \quad \text{.....13 分}$$

$$\text{由 } \frac{C_n^{k-1}}{k} = \frac{n!}{k \cdot (k-1)! (n+1-k)!} = \frac{C_{n+1}^k}{n+1},$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{C_{n+1}^k (-1)^{k-1}}{n+1} = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k (-1)^k \\ &= \frac{-1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (-1)^k - C_{n+1}^0 (-1)^0 \right] = \frac{-1}{n+1} [(1-1)^{n+1} - 1] = \frac{1}{n+1}. \end{aligned} \quad \dots\dots 16 \text{ 分}$$

$$\text{由①式可得 } a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1}, a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n}, \dots\dots, a_3 - a_2 = \frac{1}{3},$$

$$\text{则累加可得 } a_n = a_2 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \text{ 并且 } a_2 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}, \text{ 所以 } a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

$$\text{综上所述, } f_n'(-1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \text{ 成立.} \quad \dots\dots 17 \text{ 分}$$