

绵阳市高中 2023 级第一次诊断性考试

数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. B 2. D 3. C 4. A 5. B 6. A 7. D 8. C

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 全部选对的得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分.

9. ACD 10. AC 11. ABD

三、填空题：本题共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 13. 2; 14. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

四、解答题：本题共 5 小题，第 15 题 13 分，第 16、17 小题 15 分，第 18、19 小题 17 分，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 解：（1） $\because f(\pi) = \cos(\pi - \varphi) = -\frac{1}{2}$ ，则 $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ ，……………2 分

又 $\varphi \in (0, \pi)$ ， $\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$ ，……………4 分

$\therefore f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ ；……………6 分

（2）由题知： $g(x) = f(x - \frac{\pi}{6}) = \cos(x - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = \sin x$ ，

$\therefore h(x) = 2f(x) \cdot g(x) = 2\sin x \cos(x - \frac{\pi}{3})$ ，……………7 分

$\therefore h(x) = 2\sin x(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x) = \sin x \cos x + \sqrt{3}\sin^2 x$ ，

$\therefore h(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(2x - \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，……………9 分

$\because y = \sin x$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，……………11 分

$$\therefore -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore -\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{函数 } h(x) \text{ 的单调递增区间为 } [-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi], \quad k \in \mathbf{Z}. \cdots \cdots 13 \text{ 分}$$

16. 解: (1) $\because f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

$$\therefore \text{必有 } f(0) = -b = 0, \text{ 则 } b = 0, \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore f(x) = x|x+a|, \text{ 同理由 } f(1) = -f(-1), \therefore |1+a| = |-1+a|, \text{ 故 } a = 0,$$

$$\text{此时, } f(x) = x|x|, \text{ 对任意实数 } x, \text{ 都满足 } f(x) = -f(-x), \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore f(x) \text{ 为 } \mathbf{R} \text{ 上的奇函数,}$$

$$\therefore f(x) = x|x|; \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 思路一: } \because \text{当 } x \geq 1 \text{ 时, } f(x) > 0,$$

$$\therefore f(1) = |a+1| - (a^2+1) > 0, \text{ 解得: } 0 < a < 1, \cdots \cdots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore f(x) = x(x+a) - (a^2+1) = x^2 + ax - a^2 - 1,$$

$$\text{易知 } f(x) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单调递增, } \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } f(x) \geq f(1) = a(1-a) > 0, \cdots \cdots 14 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围 } (0, 1). \cdots \cdots 15 \text{ 分}$$

$$\text{思路二: } \because \text{当 } x \geq 1 \text{ 时, } f(x) > 0, \text{ 且 } b = a^2 + 1, \text{ 即对任意 } x \geq 1, \text{ 都有 } x|x+a| > a^2 + 1$$

$$\text{恒成立, 即 } |x+a| > \frac{a^2+1}{x}, \cdots \cdots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore x+a > \frac{a^2+1}{x} \text{ 或 } x+a < -\frac{a^2+1}{x} \text{ 对任意的 } x \geq 1 \text{ 恒成立, } \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore x - \frac{a^2+1}{x} + a > 0 \text{ 或 } x + a + \frac{a^2+1}{x} < 0 \text{ 对任意的 } x \geq 1 \text{ 恒成立, } \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

$$\text{令 } g(x) = x - \frac{a^2+1}{x} + a, \text{ 易知 } g(x) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 单调递增, } \cdots \cdots 11 \text{ 分}$$

故 $g(x)_{\min} = g(1) = a - a^2 > 0$, 12 分

$\therefore 0 < a < 1$, 13 分

令 $h(x) = x + \frac{a^2 + 1}{x} + a$, 易知 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 无最大值, 故不满足 $h(x) < 0$ 恒成立,

..... 14 分

综上: $0 < a < 1$ 15 分

17. 解: (1) 设公差为 d , 则由题意可得: $\begin{cases} 4a_1 + 6d = 6(2a_1 + d) - 8, \\ a_1 + d = 2a_1 + \sqrt{3} - 1, \end{cases}$, 3 分

解得: $a_1 = 1$, $d = \sqrt{3}$, 所以: $a_n = \sqrt{3}n + 1 - \sqrt{3}$; 6 分

(2) 不能构成等比数列, 7 分

其理由如下: 在数列 $\{a_n\}$ 中任取三项分别为: $a_m = \sqrt{3}m + 1 - \sqrt{3}$,

$a_n = \sqrt{3}n + 1 - \sqrt{3}$, $a_t = \sqrt{3}t + 1 - \sqrt{3}$, 9 分

若 a_m, a_n, a_t 成等比数列, 则 $a_n^2 = a_m \cdot a_t$,

即: $(\sqrt{3}n + 1 - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{3}m + 1 - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3}t + 1 - \sqrt{3})$, 10 分

整理得: $3n^2 - 3mt - 6n + 3(m + t) = \sqrt{3}(m + t - 2n)$, 11 分

因为 m, n, t 为正整数, 所以: $\begin{cases} m + t - 2n = 0 \\ 3n^2 - 3mt - 6n + 3(m + t) = 0 \end{cases}$ 12 分

化简整理得: $(m - t)^2 = 0$, 所以 $m = n = t$ 与题意矛盾, 14 分

所以, 在数列 $\{a_n\}$ 中取三个不同的项, 均不能构成等比数列. 15 分

18. 解: (1) $f(x) = -x^3 + ax^2 + x = -x(x^2 - ax - 1)$,

可知有一个零点一定是 0, 且对于方程: $x^2 - ax - 1 = 0$, $\Delta = a^2 + 4 > 0$, 且 0 一定不是方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 的根,

$\therefore f(x)$ 有 3 个相异零点; 3 分

(2) $f'(x) = -3x^2 + 2ax + 1$, 其中 $\Delta = 4a^2 + 12 > 0$,

故 x_1, x_2 是方程 $-3x^2 + 2ax + 1 = 0$ 的两根, 4 分

由韦达定理可得： $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2a}{3} \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$ ，故 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{4a^2 + 6}{9}$ ，……5 分

$$f(x_1) + f(x_2) = -x_1^3 + ax_1^2 + x_1 - x_2^3 + ax_2^2 + x_2 \\ -(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) + a(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2), \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

带入得： $-\frac{2a}{3}(\frac{4a^2 + 6}{9} + \frac{1}{3}) + a \cdot \frac{4a^2 + 6}{9} + \frac{2a}{3} = \frac{4a^3 + 18a}{27} = \frac{22}{27}$ ，解得： $a=1$ ；……9 分

另解：由 $f'(x) = -3x^2 + 2ax + 1$ ， $f''(x) = -6x + 2a$ ，

令 $f''(x) = -6x + 2a = 0$ ，解得： $x = \frac{a}{3}$ ，

又 $f(\frac{a}{3}) = \frac{2a^3 + 9a}{27}$ ，故函数 $f(x)$ 图像关于点 $(\frac{a}{3}, \frac{2a^3 + 9a}{27})$ 成中心对称，又三次函数

的极值点关于对称中心对称，故 $f(x_1) + f(x_2) = \frac{4a^3 + 18a}{27} = \frac{22}{27}$ ，解得： $a=1$ ；

(3) 由三次函数图象可知， $f(x) = f(x_2)$ 有且仅有两根为 x_2, m ，

则 $m < x_1 < 0 < x_2$ ，

即 $-x^3 + ax^2 + x = -x_2^3 + ax_2^2 + x_2$ ，有且仅有两根为 x_2, m ，

整理得： $(x - x_2)[x^2 + x_2 x + x_2^2 - a(x + x_2) - 1] = 0$ ，

所以 x_3 是方程 $x^2 + x_2 x + x_2^2 - a(x + x_2) - 1 = 0$ 的根，……12 分

又 x_2 是方程 $-3x^2 + 2ax + 1 = 0$ 的根，故 $a = \frac{3x_2^2 - 1}{2x_2}$ ，……13 分

代入上式整理得到： $2x_2 x^2 - (x_2^2 - 1)x - x_2(x_2^2 + 1) = 0$ ，

即 $(x - x_2)(2x_2 x + x_2^2 + 1) = 0$ ，……15 分

故 $m = -\frac{x_2^2 + 1}{2x_2} = -\frac{1}{2}(x_2 + \frac{1}{x_2}) \leq -1$ ，……16 分

故 m 的最大值为 -1 。……17 分

19. 解：(1) 证明： $f'(x) = -a(e^x - 1) + (1 - ax)e^x - 1$ ，注意到 $f'(0) = 0$ ，

$$f''(x) = (-ax + 1 - 2a)e^x, \quad x \geq 0. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

因为 $a \geq \frac{1}{2}$, 则 $f''(x) \leq 0$,

因此 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递减, 故 $f'(x) \leq f'(0) = 0$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递减, 因此 $f(x) \leq f(0) = 0$; $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) (i) 证明: $g'(x) = \frac{1}{x}$, 故 $g(x)$ 在点 A_n 处的切线方程为 $y = \frac{1}{a_n}(x - a_n) + \ln a_n$,

$\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

与 $h(x) = e^{x-1}$ 联立, 可得 $e^{x-1} - \frac{x}{a_n} - \ln a_n = 0$,

令 $u(x) = e^{x-1} - \frac{x}{a_n} - \ln a_n$, 则 $u'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{a_n}$,

故 $u(x)$ 在 $(0, 1 - \ln a_n)$ 单调递减, 在 $(1 - \ln a_n, +\infty)$ 单调递增, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

因为 $a_n < 1$, 则 $1 - \ln a_n > 1$, 且 $u(1) = 1 - \frac{1}{a_n} - \ln a_n = 1 - \frac{1}{a_n} + \ln \frac{1}{a_n} < 0$,

而 $u(a_n) = e^{a_n-1} - 1 - \ln a_n > a_n - 1 - \ln a_n > 0$,

故 $u(x)$ 在 $(a_n, 1)$ 上存在唯一零点, 即为 b_n , 故 $a_n < b_n < 1$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

同理, $h(x)$ 在点 B_n 处的切线方程为 $y = e^{b_n-1}(x - b_n) + e^{b_n-1}$, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

与 $g(x)$ 联立, 有 $e^{b_n-1}(x + 1 - b_n) - \ln x - 1 = 0$,

令 $v(x) = e^{b_n-1}(x + 1 - b_n) - \ln x - 1$, $v'(x) = e^{b_n-1} - \frac{1}{x}$,

则 $v(x)$ 在 $(0, e^{1-b_n})$ 单调递减, 在 $(e^{1-b_n}, +\infty)$ 单调递增,

因为 $0 < b_n < 1$, 故 $e^{1-b_n} > 1$, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$v(1) = e^{b_n-1}(2 - b_n) - 1$. 考虑 $w(x) = e^{x-1}(2 - x) - 1$, $w'(x) = e^{x-1}(1 - x)$,

则 $w(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 故 $w(x) < w(1) = 0$, 故 $v(1) < 0$,

且 $v(b_n) = e^{b_n-1} - \ln b_n - 1 > b_n - \ln b_n - 1 > 0$,

故 $v(x)$ 在 $(b_n, 1)$ 存在唯一零点, 即 a_{n+1} , 故 $b_n < a_{n+1} < 1$,

因此 $a_n < b_n < a_{n+1} < 1$, 故 $a_n < a_{n+1}$; 10 分

(ii) 由 (i) 知 $e^{b_n-1}(a_{n+1}+1-b_n) = \ln a_{n+1} + 1$, 因为 $\ln a_{n+1} < a_{n+1} - 1$,

故 $e^{b_n-1}(a_{n+1}+1-b_n) = \ln a_{n+1} + 1 < a_{n+1}$, 即 $a_{n+1} > \frac{e^{b_n-1}(1-b_n)}{1-e^{b_n-1}}$,

整理得: $a_{n+1} > \frac{1-b_n}{e^{1-b_n}-1}$, 11 分

由 (1) 知 $(1-\frac{x}{2})(e^x-1)-x < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立, 即 $\frac{x}{e^x-1} > 1-\frac{x}{2}$,

得 $a_{n+1} > \frac{1-b_n}{e^{1-b_n}-1} > 1-\frac{1-b_n}{2}$, 13 分

结合 $b_n > a_n$,

故 $a_{n+1} > \frac{1-b_n}{e^{1-b_n}-1} > 1-\frac{1-b_n}{2} > 1-\frac{1-a_n}{2}$, 即 $1-a_{n+1} < \frac{1}{2}(1-a_n)$, 14 分

$\therefore 1-a_n < \frac{1}{2}(1-a_{n-1}) < \frac{1}{2^2}(1-a_{n-2}) < \dots < \frac{1}{2^{n-1}}(1-a_1) = \frac{1}{2^{n-1}}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n}$,

即 $a_n \geq 1-\frac{1}{2^n}$, 因此 $\sum_{i=1}^n a_i \geq n-\frac{1}{2} \frac{(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = n-1+\frac{1}{2^n} > n-1$, 16 分

结合 $a_n < 1$, 故 $\sum_{i=1}^n a_i < n$, 因此 $n-1 < \sum_{i=1}^n a_i < n$,

所以 $[\sum_{i=1}^n a_i] = n-1$ 17 分