绝密★启用前

2024 届高三 5 月大联考（全国乙卷）

理科数学

本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

学校：________ 班级：________ 姓名：________ 准考证号：________

装 订 线

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z=2-\mathrm{i}$，则 $\dfrac{\bar{z}}{z-\bar{z}}=$

A. $-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$　　B. $\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}$　　C. $\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$　　D. $-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}$

2. 已知集合 $A=\{x\mid y=\log_2(2-x)\}$，$B=\{y\mid y=2^{|x|}\}$，则 $A\cap B=$

A. $(1,2)$　　B. $(1,2]$　　C. $[1,2)$　　D. $[1,2]$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{3}),\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{3}))$，$\boldsymbol{b}=(\cos(\alpha+\dfrac{5\pi}{6}),\sin(\alpha+\dfrac{5\pi}{6}))$．若 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})$，则实数 x 的值是

A. -2　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 2

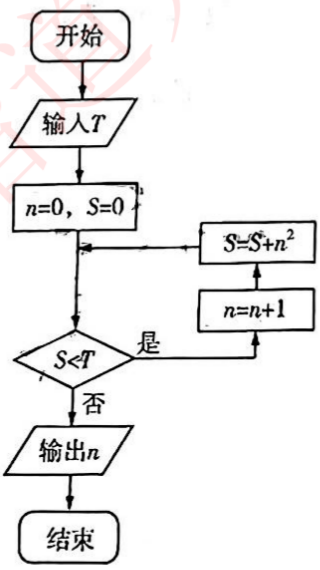
4. 已知 l_1,l_2,l 是三条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，且 $l_1\subset\alpha$，$l_2\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=l$．设甲：$l_1/\!/l$，乙：$l_1/\!/l_2$，则甲是乙的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件



5. 执行如图所示的程序框图，若输入 T 的值为 100，则输出 n 的值为

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 7

6. 若函数 $f(x)=x-\dfrac{x}{x+1}$，则下列函数中为奇函数的是

A. $f(x+1)-2$　　B. $f(x-1)-2$

C. $f(x-1)+2$　　D. $f(x+1)+2$

7. 在$(\frac{y}{x}-\frac{2x}{y})(x+y)^6$的展开式中，$x^2y^4$的系数为

A. -4　　B. 4　　C. -8　　D. 8

8. 已知数列$\{a_n\}$对任意$k\in\mathbf{N}^*$满足$a_k\cdot a_{k+1}=2^k$，则$a_1\cdot a_{2024}=$

A. 2^{1012}　　B. 2^{1013}　　C. 2^{2024}　　D. 2^{2025}

9. 已知x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y-1\geq 0\\2x-y+1\leq 0\\5x-4y+13\geq 0\end{cases}$，若$z=mx-y$的最小值为$-4$，则$m$的值为

A. -2　　B. 1　　C. 2　　D. 1或2

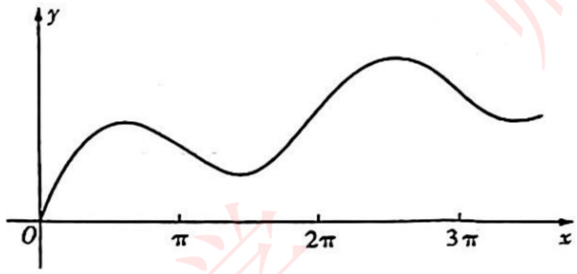
10. 若函数$y=f(x)$在第一象限内的图象如图所示，则其解析式可能是

A. $f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$

B. $f(x)=\sqrt{x}+\sin x$

C. $f(x)=\sqrt{x}+\cos x-1$

D. $f(x)=x+\cos x-1$



11. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$M$是双曲线$C$右支上一点，直线$F_1M$交双曲线$C$的左支于$N$点.若$|F_1N|=2$，$|F_2M|=3$，$|MN|=4$，且$\triangle MF_1F_2$的外接圆交双曲线$C$的一条渐近线于点$P(x_0,y_0)$，则$|y_0|$的值为

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$　　D. 3

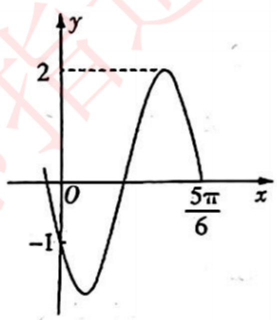
12. 已知圆锥的轴截面SAB是一个正三角形，其中S是圆锥顶点，AB是底面直径．若C是底面圆O上一点，P是母线SC上一点，$AB=6$，$AC=SP=2$，则三棱锥$P-ABC$外接球的表面积是

A. $\frac{107\pi}{3}$　　B. $\frac{109\pi}{3}$　　C. $\frac{112\pi}{3}$　　D. $\frac{116\pi}{3}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知函数$f(x)=ae^x-x$，若曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与直线$(1-2e)x+y+1=0$平行,则实数$a=$________.

14. 已知函数$f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<2\pi$）的部分图象如图所示，且$f(0)=-1$，$f(\frac{5\pi}{6})=0$，则$\omega=$________.



15. 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，F是椭圆C的右焦点，P为椭圆C上任意一点，$|PF|$的最大值为$3\sqrt{2}$．设点$A(\sqrt{2},1)$，则$|PA|+|PF|$的最小值为________.

16. 对于两个实数a，b，定义运算$a\odot b$如下：若$a\geq b$，则$a\odot b=a$；若$a<b$，则$a\odot b=b$．若x，$y\in\mathbf{R}$，则$|x-y|\odot|3-x|\odot|x+y|$的最小值是________.

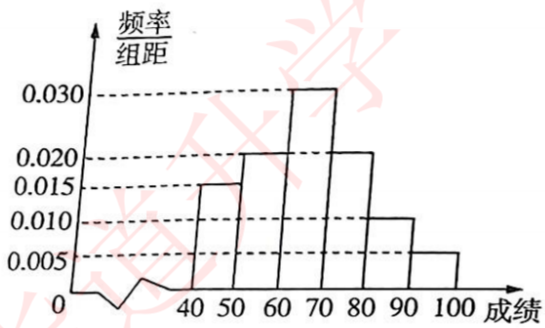
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

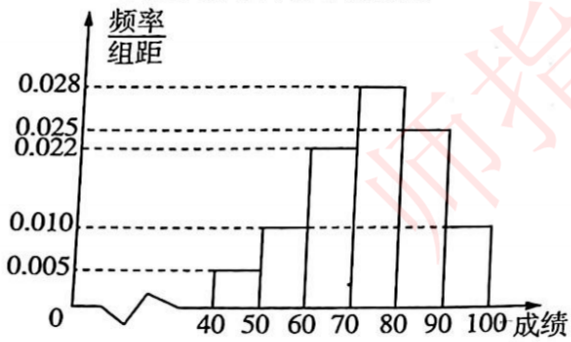
17. （12 分）

为促进中华戏曲文化的传承与发展，某校开展了戏曲进校园文艺活动．该校学生会从全校学生中随机抽取 60 名男生和 60 名女生参加戏曲知识竞赛，并按得分(满分：100 分)统计，分别绘制成频率分布直方图，如图所示．

男生得分频率分布直方图



女生得分频率分布直方图



（1）现有 10 张某戏剧的演出票送给得分在 80 分以上(含 80 分)的同学，根据男生组和女生组得分在 80 分以上(含 80 分)的人数，按分层抽样比例分配，则男生组、女生组分别得多少张该戏剧的演出票？

（2）假定学生竞赛成绩在 80 分以上(含 80 分)被认定为这名学生喜爱戏曲．将参加竞赛的学生成绩及性别制成下列 2×2 列联表(x 表示参加竞赛的学生成绩)：

	男生	女生	合计
$x\geq 80$			
$x<80$			
合计			

根据列联表，判断是否有 99%的把握认为学生喜爱戏曲与性别有关？

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ (其中 $n=a+b+c+d$).

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. （12 分）

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $2b\sin(A+\dfrac{\pi}{6})-2a=c$.

（1）求 B；

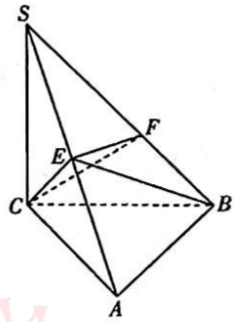
（2）若 $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，且 $BD=2$，$a=3$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. （12 分）

如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，$SC\perp$ 平面 ABC，$AB=BC=1$，$SA=2$，$SC=\sqrt{2}$，E 为 SA 的中点，$CF\perp SB$ 于点 F .

（1）求证：$CF\perp SA$；

（2）求平面 CEF 与平面 CEB 所成锐二面角的余弦值.



20. （12 分）

已知抛物线 $C: y^2 = 2px\ (p>0)$，准线 l 与 x 轴交于点 M，$A(x_0, y_0)$ 为抛物线 C 上一点，$AD \perp l$ 交 y 轴于点 D．当 $y_0 = 4\sqrt{2}$ 时，$\overline{MA} = \overline{MD} + \overline{MF}$．

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）设直线 AM 与抛物线 C 的另一交点为 B（点 B 在点 A，M 之间），过点 F 且垂直于 x 轴的直线交 AM 于点 N．是否存在实数 λ，使得 $|AM|\,|BN| = \lambda |BM|\,|AN|$？若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由．

21. （12 分）

已知函数 $f(x) = x\ln(x+1) - x^2 + ax\ (a \in \mathbf{R})$．

（1）若 $f(x)$ 在定义域内是单调函数，求 a 的取值范围；

（2）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，求证：$x_1 + x_2 > 0$．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = a + t\cos\dfrac{\pi}{4} \\ y = t\sin\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$（$t$ 为参数，$a \in \mathbf{R}$）．以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos\theta + 2\sin\theta$．

（1）写出直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

（2）设 A, B 是曲线 C 上的两点，且 $|AB| = 2$．若直线 l 上存在点 P，使得 $\angle APB = \dfrac{\pi}{2}$，求 a 的取值范围．

23. [选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

设函数 $f(x) = 2|x+1| - |x-a| + b\ (a, b \in \mathbf{R})$．

（1）若 $f(-3) > f(1)$，求实数 a 的取值范围；

（2）当 $a = 5$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2 $(x_1 < x_2)$，且满足 $x_1 + x_2 = -4$，求实数 b 的值．

考生注意清点试卷有无漏印或缺页，若有要及时更换，否则责任自负

装 订 线

2024届高三5月大联考（全国乙卷）

理科数学·全解全析及评分标准

阅卷注意事项：

1.阅卷前请各学科教研组长，组织本学科改卷老师开会，强调改卷纪律，统一标准。

2.请老师改卷前务必先做一遍试题，了解自己所改试题的答案、评分细则、答题角度后，再开始改卷。

3.请老师认真批阅，不可出现漏改、错改现象，如果不小心漏改或错改了，可以点击回评按钮重评。

4.成绩发布后，如果有学校反馈错评乱评，平台定位阅卷老师，进行通报批评。

5.解答题要在学生的答案中找寻有用的文字说明、证明过程或演算步骤，合理即可给分。

6.解答题不要只看结果，结果正确，但中间的文字说明、证明过程或演算步骤无法建立有效衔接的，不能给满分；同样，结果错误，但正确写出相应的文字说明、证明过程或演算步骤应给分，因第(1)问中结果算错，使后面最终结果出错(过程列式正确)，不宜重复扣分。

7.阅卷平台出现的相关问题，如果刷新页面重新登录未能解决，请将问题反馈给学校负责技术的老师(或考试负责人)，由其统一在技术QQ群里反馈问题并协助解决技术QQ群里反馈问题并协助解决。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出**小题5分，共60分。在每小题给出的四****要求的。**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	C	A	B	D	C	D	A	D	B	D	C

1. A【解析】因为$z=2-\mathrm{i}$,所以$\bar{z}=2+\mathrm{i}$,所以$\dfrac{\bar{z}}{z-\bar{z}}=\dfrac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}-(2+\mathrm{i})}=\dfrac{2+\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}=\dfrac{(2+\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}}{(-2\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}}=\dfrac{-1+2\mathrm{i}}{2}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$.

故选A.

2. C【解析】因为$A=(-\infty,2)$，$B=[1,+\infty)$，所以$A\cap B=[1,2)$．故选C.

3. A【解析】由题意，得$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$．因为$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})$，所以$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})=0$，所以$2|\boldsymbol{a}|^2+x|\boldsymbol{b}|^2=0$，所以$x=-2$．故选A.

4. B【解析】当$l_1/\!/l$时，取l_2为平面β内一条与l垂直的直线，得$l_1\perp l_2$，充分性不成立；当$l_1/\!/l_2$时，因为$l_2\subset\beta$，$l_1\not\subset\beta$，所以$l_1/\!/\beta$.结合$\alpha\cap\beta=l$，所以$l_1/\!/l$，必要性成立．综上可知，甲是乙的必要不充分条件．故选B.

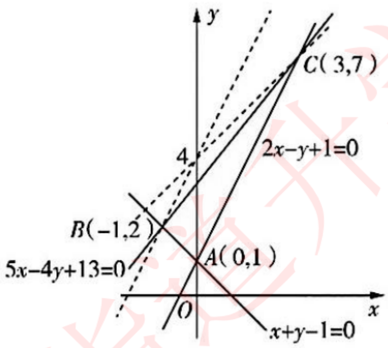
5. D【解析】逐步运行程序，得$n=0$，$S=0<100$；$n=1$，$S=1<100$；$n=2$，$S=5<100$；$n=3$，$S=14<100$；$n=4$，$S=30<100$；$n=5$，$S=55<100$；$n=6$，$S=91<100$；$n=7$，$S=140>100$，此时输出$n=7$．故选D.

6. C【解析】因为$f(x)=x-\dfrac{x}{x+1}=x+1-\dfrac{x+1-1}{x+1}-1=x+1+\dfrac{1}{x+1}-2$，所以$f(x-1)+2=x+\dfrac{1}{x}$为奇函数．故选C.

7. D【解析】因为在 $(x+y)^6$ 的展开式中，x^3y^3，xy^5 的系数分别为 C_6^3，C_6^5，所以在 $(\frac{y}{x}-\frac{2x}{y})(x+y)^6$ 的展开式中，x^2y^4 的系数为 $C_6^3-2C_6^5=8$．故选 D.

8. A【解析】因为 $a_k\cdot a_{k+1}=2^k$，所以 $a_{k+1}\cdot a_{k+2}=2^{k+1}$，所以 $\frac{a_{k+2}}{a_k}=2$，所以 $\frac{a_{2024}}{a_{2022}}\cdot\frac{a_{2022}}{a_{2020}}\cdot\frac{a_{2020}}{a_{2018}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_8}{a_6}\cdot\frac{a_6}{a_4}\cdot\frac{a_4}{a_2}$ $=2^{1011}$，即 $\frac{a_{2024}}{a_2}=2^{1011}$①．又因为 $a_1\cdot a_2=2$②，①②两式相乘，得 $a_1\cdot a_{2024}=2^{1012}$．故选 A.

9. D【解析】作出不等式组 $\begin{cases}x+y-1\ge 0\\2x-y+1\le 0\\5x-4y+13\ge 0\end{cases}$ 表示的可行域如图中阴影部分所示(包含边界），其中 $A(0,1)$，$B(-1,2)$，$C(3,7)$，所以 $z=mx-y$ 的最小值为 -4 等价于直线 $y=mx+(-z)$ 的纵截距 $-z$ 的最大值为 4，所以直线 $y=mx+(-z)$ 经过点 $(0,4)$．结合图象，知直线 $y=mx+(-z)$ 经过点 $B(-1,2)$ 或 $C(3,7)$ 时满足题意，所以 m 的值为 1 或 2．故选 D.



10. B【解析】对于 A，$f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x$，点 $(0,f(0))$，$(\pi,f(\pi))$，$(2\pi,f(2\pi))$，$(3\pi,f(3\pi))$ 在同一条直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上，与图象不符，舍去；

对于 C，$f(x)=\sqrt{x}+\cos x-1$，$f(\pi)=\sqrt{\pi}-2<0$，与图象不符，舍去；

对于 D，$f(x)=x+\cos x-1$，$f'(x)=1-\sin x\ge 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，与图象不符，舍去．故选 B.

11. D【解析】因为点 M，N 分别在双曲线 C 的右支和左支上，所以 $|MF_1|-|MF_2|=|NF_2|-|NF_1|=2a$．又 $|F_1N|=2$，$|F_2M|=3$，$|MN|=4$，所以 $a=\frac{3}{2}$，$|NF_2|=5$，所以 $|NF_2|^2=|MN|^2+|MF_2|^2$，所以 $\angle NMF_2$ 是直角.在 $Rt\triangle MF_1F_2$ 中，$|F_1F_2|^2=|F_1M|^2+|MF_2|^2$，所以 $(2c)^2=6^2+3^2$，所以 $b^2=c^2-a^2=\frac{6^2+3^2}{4}-\frac{9}{4}=9$，即 $b=3$.

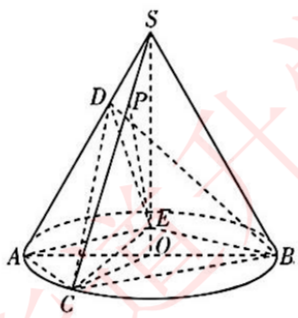
又 $\triangle MF_1F_2$ 的外接圆交双曲线 C 的一条渐近线于点 $P(x_0,y_0)$，所以 $|OP|=c$，所以点 $P(x_0,y_0)$ 的坐标满

足$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=c^2\\ \dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=0\end{cases}$,解得$\begin{cases}x_0^2=a^2\\ y_0^2=b^2\end{cases}$,所以$\begin{cases}|x_0|=a\\ |y_0|=b\end{cases}$,故选 D.

12. C 【解析】如图,设点 D 在母线 SA 上且 $SD=SP=2$,因为 $\triangle ACB$ 是直角三角形,所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心 E 在 SO 上,所以 $EP=ED$,即三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心 E 也是三棱锥 $D-ABC$ 外接球的球心,且两个外接球的表面积相等.无界学习公众号

由 $AO=CO=BO$,得 $\triangle ABD$ 的外心即为三棱锥 $A-BCD$ 外接球的球心 E.

在 $\triangle ABD$ 中,$BD=\sqrt{AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cos\angle DAB}=\sqrt{4^2+6^2-2\times4\times6\times\dfrac{1}{2}}=2\sqrt{7}$,所以 $\triangle ABD$ 的外接圆的直径 $2R=\dfrac{BD}{\sin\angle DAB}=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sin60^\circ}=\dfrac{4\sqrt{21}}{3}$,所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积是 $4\pi R^2=\pi(2R)^2=\dfrac{112\pi}{3}$.故选 C.



二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 2 【解析】因为 $f'(x)=ae^x-1$,所以 $f'(1)=ae-1=2e-1$,所以 $a=2$.故填 2.

14. $\dfrac{11}{5}$ 【解析】由题意,知 $A=2$,最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$①.注意到 $\dfrac{3T}{4}<\dfrac{5\pi}{6}<T$②.结合①②,解得 $\dfrac{9}{5}<\omega<\dfrac{12}{5}$.将点 $(0,-1)$ 代入 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$,得 $\cos\varphi=-\dfrac{1}{2}$.因为 $0<\varphi<2\pi$,所以 $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$ 或 $\dfrac{4\pi}{3}$.依题意,得 $\omega\cdot\dfrac{5\pi}{6}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.当 $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$ 时,$\omega=\dfrac{6k_1-1}{5}(k_1\in\mathbf{Z})$,取 $k_1=2$,得 $\omega=\dfrac{11}{5}$,满足题意;当 $\varphi=\dfrac{4\pi}{3}$ 时,$\omega=\dfrac{6k_2-5}{5}(k_2\in\mathbf{Z})$,不存在使 $\dfrac{9}{5}<\omega<\dfrac{12}{5}$ 成立的整数 k_2,舍去.故填 $\dfrac{11}{5}$.

15. $4\sqrt{2}-3$ 【解析】设椭圆 C 的半焦距为 c,由题意,得 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$,$a+c=3\sqrt{2}$,所以 $c=\sqrt{2}$,$a=2\sqrt{2}$.

设椭圆 C 的左焦点为 F',则 $F'(-\sqrt{2},0)$,

所以 $|PA|+|PF|=|PA|+(2a-|PF'|)=2a+|PA|-|PF'|\ge 2a-|AF'|=4\sqrt{2}-3$.故填 $4\sqrt{2}-3$.

16. $\dfrac{3}{2}$ 【解析】依题意,得 $a\odot b=\max\{a,b\}$,所以 $|a+b|\odot|a-b|=\max\{|a+b|,|a-b|\}$.

设 $\max\{|a+b|,|a-b|\}=M$，则 $\begin{cases}M\ge|a+b|\\M\ge|a-b|\end{cases}$，所以 $2M\ge|a+b|+|a-b|\ge2|a|$，则 $|a+b|\odot|a-b|$

$\ge|a|$，

所以 $\min\{|x-y|\odot|3-x|\odot|x+y|\}=\min\{|x-y|\odot|x+y|\odot|3-x|\}=\min\{|x|\odot|3-x|\}=\dfrac{3}{2}$，

当且仅当 $x=\dfrac{3}{2}$，$y=0$ 取等号．故填 $\dfrac{3}{2}$．

说明:

1.第 14 题除了正确答案 $\dfrac{11}{5}$ 外，多填不给分；

2.第 15 题填近似值 2.657 不给分.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

【解析】（1）由频率分布直方图，

知男生组得分在 80 分以上（含 80 分）的有 $(0.010+0.005)\times10\times60=9$（人），（1 分）

女生组得分在 80 分以上（含 80 分）的有 $(0.025+0.010)\times10\times60=21$（人），（2 分）

男生占比为 $\dfrac{9}{9+21}$，女生占比为 $\dfrac{21}{9+21}$，（3 分）

所以男生组分得票数为 $\dfrac{9}{9+21}\times10=3$，（4 分）

女生组分得票数为 $\dfrac{21}{9+21}\times10=7$，

所以男生组、女生组分别得 3 张和 7 张该戏剧的演出票.（5 分）

（2）由（1），知男生组得分在 80 分以上（含 80 分）的有 9 人，80 分以下的有 51 人；女生组得分在 80 分以上（含 80 分）的有 21 人，80 分以下的有 39 人，（6 分）

所以得如下 2×2 列联表：

	男生	女生	合计
$x\ge80$	9	21	30
$x<80$	51	39	90
合计	60	60	120

（8 分）

根据列联表中数据计算，得 $K^2=\dfrac{120\times(9\times39-21\times51)^2}{60\times60\times30\times90}$（9 分）

$=\dfrac{32}{5}=6.4$（10分）

<6.635，（11分）

根据临界值表，知没有99%的把握认为学生喜爱戏曲与性别有关．（12分）

说明：

第一问：

1.1分段写出男生组得分在80分以上（含80分）的人数；

2.2分段写出女生组得分在80分以上（含80分）的人数；

3.3分段写出男女生80分以上（含80分）的占比；

4.4分段求出男生组获得的票数；

5.5分段求出女生组获得的票数；

6.1-2分段都计算错，但列式正确给1分.

第二问：

1.6分段分别求出男女生组得分在80分以上（含80分）和80分以下的人数；

2.8分段填好列联表，列联表中全对给2分，有错时，有6个或6个以上正确给1分；

3.9分段列出K^2的计算式；

4.10分段计算出K^2；

5.11分段将算出的K^2的值与6.635进行比较，比较时写成$3.841<K^2<6.635$不扣分；

6.12分段下结论，只回答没有不给分.

18．（12分）

【解析】（1）由正弦定理及$2b\sin(A+\dfrac{\pi}{6})-2a=c$，得$2\sin B\sin(A+\dfrac{\pi}{6})-2\sin A=\sin C$，（1分）

所以$\sin B(\sqrt{3}\sin A+\cos A)-2\sin A=\sin(A+B)$，（2分）

整理，得$\sqrt{3}\sin A\sin B-2\sin A=\sin A\cos B$．（3分）

因为$\sin A\neq 0$，所以$\sqrt{3}\sin B-\cos B=2$，即$\sin(B-\dfrac{\pi}{6})=1$．（4分）

因为$B-\dfrac{\pi}{6}\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$，所以$B=\dfrac{2\pi}{3}$．（6分）

（2）因为BD为$\angle ABC$的平分线，所以$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle BAD}$，

即$\dfrac{1}{2}ac\sin\angle ABC=\dfrac{1}{2}\times 2c\sin\dfrac{\angle ABC}{2}+\dfrac{1}{2}\times 2a\sin\dfrac{\angle ABC}{2}$，（8分）

化简，得$ac=2(a+c)$，（9分）

由$a=3$，得$c=6$，（10分）

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B$（11分）

$=\frac{1}{2}\times 3\times 6\times \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.（12 分）

说明：

第一问：

1.1 分段由正弦定理化边为角；

2.2 分段利用两角和公式化简，没有将 $\sin C$ 换成 $\sin(A+B)$ 也给分；

3.3 分段化简，统一用角 A，B 表示；

4.4 分段化简得出 B 满足的关系式，正确写出 $\sqrt{3}\sin B-\cos B=2$ 就给分；

5.6 分段求出角 B，不写出 $B-\frac{\pi}{6}$ 的取值范围直接得出 $B=\frac{2\pi}{3}$ 不扣分；

6.第一问没有得分点时能正确写出正弦定理给 1 分.

第二问：

1.8 分段由面积建立等量关系；

2.9 分段化简得出 a,c 的关系；

3.10 分段由 a，求出 c 的值；

4.11 分段写出 $\triangle ABC$ 面积的表示；

5.12 分段计算得出 $\triangle ABC$ 的面积；

6.第二问没有得分点时，能正确写出面积公式给 1 分.

19.（12 分）

【解析】(1) 因为 $SC\perp$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，所以 $SC\perp AC$.（1 分）

因为 $SA=2$，$SC=\sqrt{2}$，所以 $AC=\sqrt{2}$.

结合 $AB=BC=1$，得 $AB\perp BC$.因为 $SC\perp$ 平面 ABC，$AB\subset$ 平面 ABC，所以 $AB\perp SC$.（2 分）

又 $SC,BC\subset$ 平面 SBC，且 $SC\cap BC=C$，所以 $AB\perp$ 平面 SBC.（3 分）

又 $CF\subset$ 平面 SBC，所以 $AB\perp CF$.（4 分）

又 $CF\perp SB$，$SB,AB\subset$ 平面 SAB，且 $SB\cap AB=B$，所以 $CF\perp$ 平面 SAB.（5 分）

又 $SA\subset$ 平面 SAB，所以 $CF\perp SA$.（6 分）

(2) 如图，以点 C 为坐标原点，过点 C 且平行于 AB 的直线为 x 轴，CB，CS 所在的直线分别为 y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A(1,1,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,0)$，$S(0,0,\sqrt{2})$，$E(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$F(0,\frac{2}{3},\frac{\sqrt{2}}{3})$，（7 分）

所以 $\overrightarrow{CE}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{CB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{CF}=(0,\frac{2}{3},\frac{\sqrt{2}}{3})$.（8 分）

设平面 CEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

所以$\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot \boldsymbol{m}=0\\ \overrightarrow{CF}\cdot \boldsymbol{m}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1+\frac{\sqrt{2}}{2}z_1=0\\ \frac{2}{3}y_1+\frac{\sqrt{2}}{3}z_1=0\end{cases}$.

取$y_1=1$，则$x_1=1$，$z_1=-\sqrt{2}$，所以$\boldsymbol{m}=(1,1,-\sqrt{2})$是平面$CEF$的一个法向量.（9分）

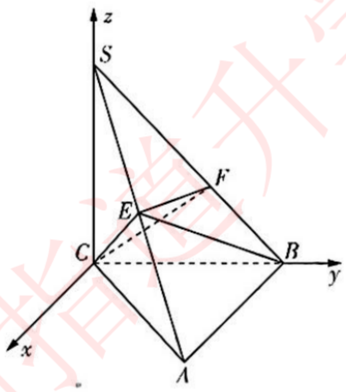
设平面CEB的法向量为$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

所以$\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot \boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{CB}\cdot \boldsymbol{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}y_2+\frac{\sqrt{2}}{2}z_2=0\\ y_2=0\end{cases}$.

取$z_2=1$，则$y_2=0$，$x_2=-\sqrt{2}$，所以$\boldsymbol{n}=(-\sqrt{2},0,1)$是平面$CEB$的一个法向量，（10分）

所以$\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{4}\times\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，（11分）

所以平面CEF与平面CEB所成锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.（12分）



说明：

第一问：

1.1分段证$SC\perp AC$；

2.2分段计算出各边的长度并证明$AB\perp SC$；

3.3分段证$AB\perp$平面SBC；

4.4分段证$AB\perp CF$，不写$CF\subset$平面SBC不扣分；

5.5分段证$CF\perp$平面SAB，不写$SB,AB\subset$平面SAB，且$SB\cap AB=B$不扣分；

6.6分段证$CF\perp SA$，不写$SA\subset$平面SAB不扣分.

第二问：

1.7分段建立空间直角坐标系，并算出各点坐标，能正确建立坐标系，写对三个或三个以上点坐标给1分，图中画出坐标系，解答中没有对坐标系建立的叙述不扣分；

2.8分段求出各向量的坐标；

3.9 分段求出平面 CEF 的一个法向量，正确求出法向量没有过程也给分；

4.10 分段求出平面 CEB 的一个法向量，正确求出法向量没有过程也给分；

5.11 分段求出两法向量夹角的余弦值；

6.12 分段得出平面 CEF 与平面 CEB 所成锐二面角的余弦值；

7.其他建系方法也按相应步骤给分.

或另解：如图，以点 B 为坐标原点，BC,BA 所在的直线分别为 x 轴、y 轴，过点 B 且平行于 CS 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(0,1,0)$，$B(0,0,0)$，$C(1,0,0)$，$S(1,0,\sqrt{2})$，$E(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$F(\frac{1}{3},0,\frac{\sqrt{2}}{3})$，（7 分）

所以 $\overrightarrow{CE}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{CB}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{CF}=(-\frac{2}{3},0,\frac{\sqrt{2}}{3})$.（8 分）

设平面 CEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}=0\\ \overrightarrow{CF}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1+\frac{\sqrt{2}}{2}z_1=0\\ -\frac{2}{3}x_1+\frac{\sqrt{2}}{3}z_1=0\end{cases}$.

取 $z_1=\sqrt{2}$，则 $x_1=1$，$y_1=-1$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,-1,\sqrt{2})$ 是平面 CEF 的一个法向量.（9 分）

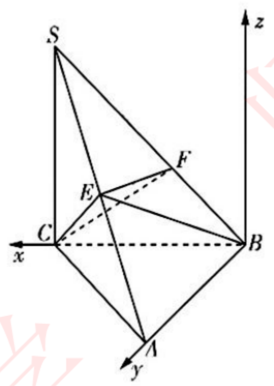
设平面 CEB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}y_2+\frac{\sqrt{2}}{2}z_2=0\\ -x_2=0\end{cases}$.

取 $z_2=1$，则 $x_2=0$，$y_2=-\sqrt{2}$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,-\sqrt{2},1)$ 是平面 CEB 的一个法向量，（10 分）

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，（11 分）

所以平面 CEF 与平面 CEB 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.（12 分）



20. （12分）

【解析】（1）因为当 $y_0=4\sqrt{2}$ 时，$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}$，所以四边形 $MFAD$ 为平行四边形，（1分）

所以 $|AD|=|MF|=p$，即 $x_0=p$，所以 $A(p,4\sqrt{2})$，（2分）

将 $A(p,4\sqrt{2})$ 代入 $y^2=2px$，得 $32=2p^2$，（3分）

解得 $p=4$，（4分）

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$．（5分）

（2）如图，由题意，得 $M(-2,0)$．设直线 AM 的方程为 $x=my-2(m\neq 0)$，$B(x_1,y_1)$，则 $N(2,\frac{4}{m})$．

（6分）

由 $\begin{cases}y^2=8x\\x=my-2\end{cases}$，得 $y^2-8my+16=0$，$\Delta=64m^2-64>0$，（7分）

所以 $y_0+y_1=8m$，$y_0y_1=16$．（8分）

假设存在实数 λ，使得 $|AM||BN|=\lambda|BM||AN|$，即 $\frac{|AM||BN|}{|BM||AN|}=\lambda$．

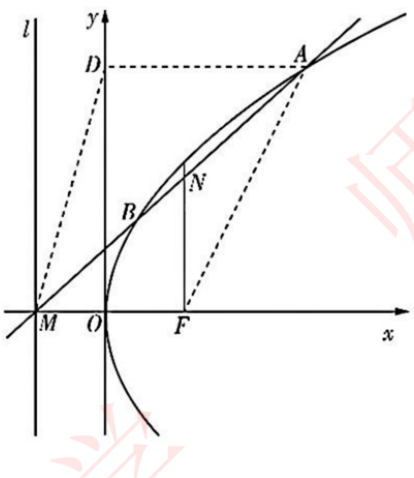
由题意，知 $\frac{|AM|}{|BM|}=\frac{|y_0|}{|y_1|}$，$\frac{|BN|}{|AN|}=\frac{|2-x_1|}{|x_0-2|}=\frac{|my_1-4|}{|my_0-4|}$，（9分）

所以 $\frac{|AM|}{|BM|}\cdot\frac{|BN|}{|AN|}=\frac{|y_0|}{|y_1|}\cdot\frac{|my_1-4|}{|my_0-4|}=\frac{|my_0y_1-4y_0|}{|my_0y_1-4y_1|}$．（10分）

又 $y_0+y_1=8m$，$y_0y_1=16$，

所以 $\frac{|AM|}{|BM|}\cdot\frac{|BN|}{|AN|}=\frac{|my_0y_1-4y_0|}{|my_0y_1-4y_1|}=\frac{|16m-4y_0|}{|16m-4(8m-y_0)|}=\frac{|16m-4y_0|}{|4y_0-16m|}=1$，（11分）

即存在实数 $\lambda=1$，使得 $|AM||BN|=\lambda|BM||AN|$ 成立．（12分）



说明：

第一问：

1.1 分段得出四边形 $MFAD$ 为平行四边形；

2.2 分段写出 A 点坐标 $(p,4\sqrt{2})$；

3.3 分段将 A 点坐标代入抛物线方程；

4.4 分段解出 p；

5.5 分段写出抛物线方程.

第二问：

1.6 分段设出直线 AM 的方程；

2.7 分段将抛物线方程与直线方程组成方程组，得出关于 y 的一元二次方程；

3.8 分段写出根与系数的关系；

4.9 分段将 $\frac{|AM|}{|BM|}$，$\frac{|BN|}{|AN|}$ 利用相似转化为用坐标表示；

5.10 分段将 $\frac{|AM|}{|BM|}\cdot\frac{|BN|}{|AN|}$ 合并化简；

6.11 分段将根与系数的关系，代入 $\frac{|AM|}{|BM|}\cdot\frac{|BN|}{|AN|}$ 中，得出定值；

7.12 分段总结存在定值 λ；

8.6 分段设出直线 AM 的方程为 $y=k(x+2)$ 也按相应步骤给分；

9.10 分段没有化简为 $\frac{|my_0y_1-4y_0|}{|my_0y_1-4y_1|}$ 不给分；

10.没有解答过程，猜测出 $\lambda=1$ 给 1 分.

21. （12 分）

【解析】（1）由已知，得函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,+\infty)$，$f'(x)=\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}-2x+1+a$．（1 分）

①若 $f(x)$ 在定义域内是单调递增函数，则 $f'(x)=\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}-2x+1+a\geq 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立.（2 分）

注意到 $\ln(x+1)\leq x$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，

所以 $f'(x)=\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}-2x+1+a<x-2x+1+a=-x+1+a$.

若 $1+a\geq -1$，即当 $a\geq -2$ 时，取 $x_0>1+a$，则 $f'(x_0)<-x_0+1+a<0$；

若 $1+a<-1$，即当 $a<-2$ 时，取 $x_0>-1$，则 $f'(x_0)<-x_0+1+a<0$，

所以 $f'(x)=\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}-2x+1+a\geq 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上不可能恒成立，舍去.（3 分）

②若 $f(x)$ 在定义域内是单调递减函数，则 $f'(x)=\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}-2x+1+a\leq 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成

立．（4分）

令 $g(x)=\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}-2x+1+a$，则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-2=\frac{-2x^2-3x}{(x+1)^2}=\frac{-x(2x+3)}{(x+1)^2}$ $(x>-1)$，

所以当 $-1<x<0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增；

当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(0)=a$，所以由 $f'(x)\le 0$ 恒成立，得 $a\le 0$，

即当 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减时，a 的取值范围是 $(-\infty,0]$．（5分）

综上，当 $f(x)$ 在定义域内是单调函数时，a 的取值范围是 $(-\infty,0]$．（6分）

（2）由（1），知 $f(x)$ 在定义域内是单调函数时，必有 $a\le 0$，所以 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，必须 $a>0$，x_1，x_2 是 $g(x)=\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}-2x+1+a=0$ 的两个根，

所以 $g(x_1)=g(x_2)=0$，$a=-\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+2x-1$．（8分）

由（1），知 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．

不妨设 $-1<x_1<0<x_2$．

要证 $x_1+x_2>0$，即证 $x_2>-x_1$．

因为 $-x_1>0$，$x_2>0$，所以亦即证 $g(x_2)<g(-x_1)$，所以要证 $0<g(-x_1)$．（9分）

注意到 $g(-x_1)=\ln(-x_1+1)-\frac{1}{-x_1+1}+2x_1+1+a=\ln(-x_1+1)-\frac{1}{-x_1+1}+2x_1+1-\ln(x_1+1)+\frac{1}{x_1+1}+2x_1-1$

$=\ln\frac{1-x_1}{x_1+1}+\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_1-1}+4x_1$，（10分）

令 $G(x)=\ln\frac{1-x}{x+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+4x$，$x\in(-1,0)$，则 $\frac{1}{(x^2-1)^2}>1$，

所以 $G'(x)=\frac{2}{(x+1)(x-1)}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}+4=\frac{-4}{(x+1)^2(x-1)^2}+4<0$，

所以 $G(x)=\ln\frac{1-x}{x+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+4x$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，（11分）

所以 $G(x)>G(0)=0$，所以 $x_1+x_2>0$．（12分）

说明：

第一问：

1.1 分段求出 $f'(x)$；

2.2 分段由 $f(x)$ 在定义域内单调递增得 $f'(x)\ge 0$ 恒成立；

3.3 分段通过放缩取点 x_0，使得 $f'(x_0)<0$，从而得出 $f'(x)\ge 0$ 不可能恒成立；

4.4 分段由 $f(x)$ 在定义域内单调递减得 $f'(x)\le 0$ 恒成立；

5.5 分段二次求导得出 $f(x)$ 单调递减对应 a 的取值范围；

6.6 分段得出 $f(x)$ 在定义域内单调时 a 的取值范围.

第二问：

1.8 分段得出 $a>0$ 和 $g(x)=0$ 的两根 x_1，x_2；

2.9 分段将 $x_1+x_2>0$ 转化为 $g(x_2)<g(-x_1)$；

3.10 分段用 x_1 表示 a 代入化简 $g(-x_1)$；

4.11 分段令 $G(x)=\ln\frac{1-x}{x+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+4x$，并求出 $G(x)$ 的单调性；

5.12 分段由 $G(x)>G(0)$ 证出 $x_1+x_2>0$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

【解析】（1）由 $\begin{cases}x=a+t\cos\frac{\pi}{4}\\ y=t\sin\frac{\pi}{4}\end{cases}$（$t$ 为参数，$a\in\mathbf{R}$），消去参数 t，得直线 l 的普通方程为 $x-y-a=0$.

（2 分）

由 $\rho=2\cos\theta+2\sin\theta$，得 $\rho^2=2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$.（3 分）

将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入 $\rho^2=2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$，

得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-2y=0$，即 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$．（5 分）

（2）由（1），知曲线 C 表示圆心为 $(1,1)$，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆，l 为一条直线.

设弦 AB 的中点为 M，

因为 $|AB|=2$，所以 $|CM|=1$，

所以点 M 在以 C $(1,1)$ 为圆心，1 为半径的圆上.（6 分）

又 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$，所以 $|PM|=1$，所以点 P 在以 M 为圆心，1 为半径的圆上.（7 分）

依题意，直线 l 上存在点 P，使得 $|PC|\le 2$，（8 分）

所以点 C 到直线 l 的距离 $d\le 2$，即 $d=\frac{|a|}{\sqrt{2}}\le 2$，（9 分）

所以 $-2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$，

所以 a 的取值范围为 $[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$.（10 分）

说明：

第一问：

1.2 分段直接写出直线的普通方程不扣分，没有写成一般式不扣分；

2.3 分段对曲线 C 的极坐标方程两边乘以 ρ；

3.5 分段由互化公式写出曲线 C 的直角坐标方程，并把曲线 C 的方程化为标准方程；

4.5 分段直接写出曲线 C 的直角坐标方程的一般式不化为标准方程不扣分；

5.第一问没有得分点时，正确写出极坐标化为直角坐标的公式给 1 分.

第二问：

1.6 分段得出点 M 的轨迹；

2.7 分段得出点 P 的轨迹；

3.8 分段将 $|PM|=1$ 转化为 P 到圆心 C 的距离 $|PC|\le 2$；

4.9 分段将 $|PC|\le 2$ 转化为 a 满足的关系；

5.10 分段求出 a 的取值范围，最后结果不写成区间或集合形式不扣分.

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

【解析】（1）若 $f(-3)>f(1)$，则 $2\times|-3+1|-|-3-a|+b>2\times|1+1|-|1-a|+b$，（1 分）

即 $|3+a|<|1-a|$，（2 分）

两边平方，得 $9+6a+a^2<a^2-2a+1$，即 $8a<-8$，（3 分）

解得 $a<-1$，所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)$.（5 分）

（2）因为 $a=5$，所以函数 $f(x)=2|x+1|-|x-5|+b=\begin{cases}-x-7+b & (x\le -1)\\ 3x-3+b & (-1<x<5)\\ x+7+b & (x\ge 5)\end{cases}$.（6 分）

观察图象（图略）,知函数 $f(x)=2|x+1|-|x-5|+b$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调递减，在 $(-1,5)$ 和 $[5,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(-1)=-6+b$，$f(5)=12+b$，（7 分）

所以①当 $-12<b<6$ 时，$x_1=-7+b$，$x_2=\dfrac{3-b}{3}$.由 $x_1+x_2=\dfrac{-18+2b}{3}=-4$，解得 $b=3$；（8 分）

②当 $b\le -12$ 时，$x_1=-7+b$，$x_2=-7-b$，此时 $x_1+x_2=-14$，与 $x_1+x_2=-4$ 矛盾，舍去.（9 分）

综上，实数 b 的值为 3.（10 分）

说明：

第一问：

1.1 分段将 $f(-3)$，$f(1)$ 代入；

2.2 分段化简得出关于 a 的绝对值不等式；

3.3 分段平方化简；

4.5 分段写出 a 的取值范围；

5.最后结果不写成区间或集合形式不扣分.

第二问：

1.6 分段将 $f(x)$ 写成分段函数；

2.7 分段得出 $f(x)$ 的单调性；

3.8 分段讨论 $-12<b<6$ 时，x_1，x_2 的值，求出 b；

4.9 分段讨论 $b\le -12$ 时，x_1，x_2 的值，得出矛盾；

5.10 分段得出 b 的值.