绝密★启用前

2024 届高三 5 月大联考（全国甲卷）

文科数学

本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟.

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $M=\{x|0<x-1<2\},N=\{x|(x-2)(x+1)<0\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A. $(0,2)$　　B. $(0,3)$　　C. $(-1,3)$　　D. $(1,3)$

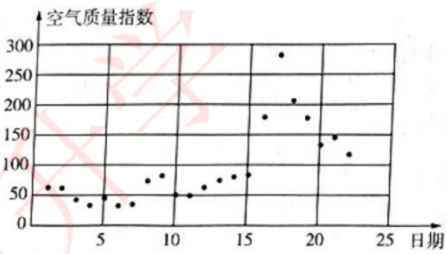
2.已知 $z=1-\mathrm{i}$ 是方程 $z^2+2az-b=0(a,b\in\mathbf{R})$ 的根，则 $a+b=$（　　）

A.-3　　B.-1　　C.2　　D.3

3.空气质量指数（Air Quality Index，简称 AQI）等级表：

空气质量等级	优	良	轻度污染	中度污染	重度污染	严重污染
空气质量指数（AQI）	$(0,50]$	$(50,100]$	$(100,150]$	$(150,200]$	$(200,300]$	$(300,+\infty)$

以下是某市 2024 年 4 月 1 日至 22 日空气质量指数分布的散点图，下列关于这 22 天空气质量的描述，不正确的是（　　）



A.空气质量为“良”的天数最多

B.空气质量为“优”和“良”的天数超过一半

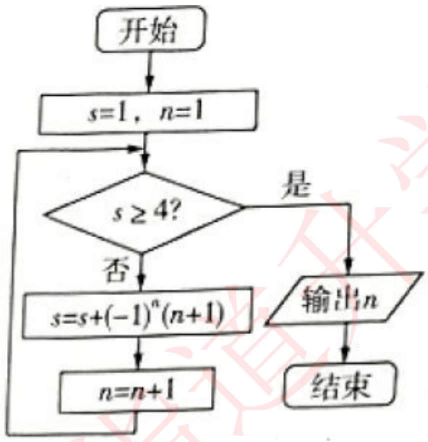
C.17 日空气质量为“重度污染”

D.该市这 22 天空气质量越来越差

4.已知平面向量 $\vec{a}=\left(1,\sqrt{3}\right),\vec{b}=\left(\sqrt{3},1\right)$，且 $\vec{a}\perp\left(\vec{b}-\lambda\vec{a}\right)$，则实数 λ 的值为（　　）

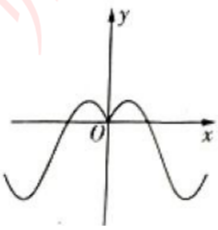
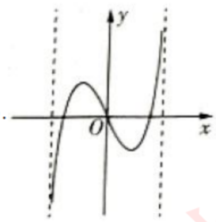
A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

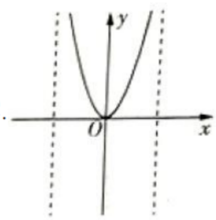
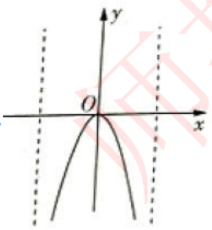
5.执行如图所示的程序框图，则输出 n 的值为（　　）



A.8　　B.7　　C.6　　D.5

6.函数 $f\left(x\right)=\sin x\cdot\ln\dfrac{2+x}{2-x}$ 的大致图象是（　　）

A. 
B. 

C. 
D. 

7.已知正四面体 $ABCD$ 中，E 是 AB 的中点，连接 DE,G 是 DE 的中点，点 F 满足 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FC}$，则（　　）

A. $AD\perp EF$

B. EF // 平面 BCD

C. FG // 平面 BCD

D.平面 $EFG\perp$ 平面 ABD

8.已知 $a=\log_7 21,b=\log_5 10,c=\log_3 3\sqrt{3}$，则（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $b>a>c$　　D. $c>a>b$

9.已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$,F 是椭圆 C 的右焦点，P 为椭圆 C 上任意一点，$|PF|$

的最大值为$3\sqrt{2}$.设点$A\left(\sqrt{2},1\right)$，则$|PA|+|PF|$的最小值为（　　）

A. $4\sqrt{2}-3$　　B. $4\sqrt{2}-1$　　C. $4\sqrt{2}+3$　　D.6

10.已知等差数列$\{a_n\}$的公差为d，前n项和为$S_n, a_1=5$.若$\sqrt{S_1+4},\sqrt{S_2+4},\sqrt{S_3+4}$成等差数列，且$d\in(1,10)$，则$S_4=$（　　）

A.12　　B.21　　C.32　　D.56

11.已知函数$f(x)=2|\sin x|\cos x$，下列关于$f(x)$的描述，不正确的是（　　）

A. $f\left(\dfrac{25}{8}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

B. $f(x)$的最小正周期为2π

C. $f(x)$的图象关于直线$x=3\pi$对称

D. $f(x)$在$\left(6\pi,\dfrac{13}{2}\pi\right)$上单调递增

12.已知圆锥SO的母线长为6, AB是底面圆的直径，C为底面圆周上一点，$\angle AOC=120^\circ$，当圆锥SO的体积最大时，直线AC和SB所成角的余弦值为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13.已知函数$f(x)=ae^x-x$，若曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与直线$(1-2e)x+y+1=0$平行，则实数$a=$__________.

14.已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n, a_2=\dfrac{1}{2}, a_5=4$，则$S_3=$__________.

15.某企业钳工、车工和焊工三个车间分别推荐了1名男员工和1名女员工，供该企业工会从中选出2名员工参加全国技能比赛.若这6名员工每人被选上的机会相等，则选出的2人恰好是1名男员工和1名女员工，且他们来自不同车间的概率为__________.

16.设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2,A$为左顶点，过点$F_1$的直线与双曲线$C$的左、右两支分别交于点$N,M$（点$M$在第一象限）.若$\overrightarrow{MF_2}=4\overrightarrow{NA}$，则双曲线$C$的离心率$e=$__________，$\cos\angle F_1MF_2=$__________.（第一空2分，第二空3分）

三、解答题：共0分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题，每个试

题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

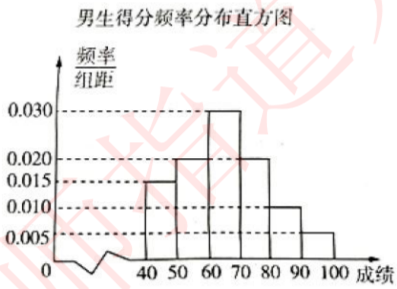
已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 $a,b,c,C=\dfrac{\pi}{6},ab=4b-4c\cos A$.

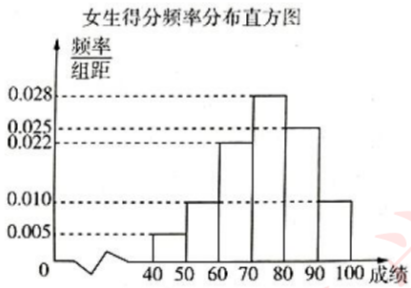
（1）求 b；

（2）若 $c=\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18.（12 分）

为促进中华戏曲文化的传承与发展，某校开展了戏曲进校园文艺活动.该校学生会从全校学生中随机抽取 60 名男生和 60 名女生参加戏曲知识竞赛，并按得分（满分：100 分）统计，分别绘制成频率分布直方图，如图所示.





（1）现有 10 张某戏剧的演出票送给得分在 80 分以上（含 80 分）的同学，根据男生组和女生组得分在 80 分以上（含 80 分）的人数，按分层抽样比例分配，则男生组、女生组分别得多少张该戏剧的演出票？

（2）假定学生竞赛成绩在 80 分以上（含 80 分）被认定为这名学生喜爱戏曲.将参加竞赛的学生成绩及性别制成下列 2×2 列联表（x 表示参加竞赛的学生成绩）：

	男生	女生	合计
$x\geq80$			
$x<80$			
合计			

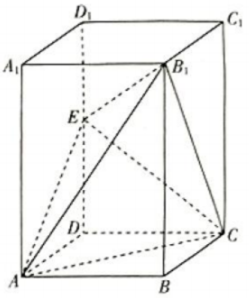
根据列联表，判断是否有 99% 的把握认为学生喜爱戏曲与性别有关？

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$（其中 $n=a+b+c+d$）.

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19.（12 分）

如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=4,AB=2$，E 为棱 DD_1 上一点（含端点），且 $DE=\lambda DD_1$.



（1）证明：$AC \perp B_1E$；

（2）当 $\lambda = \dfrac{1}{2}$ 时，证明：$B_1E \perp$ 平面 ACE；

（3）设几何体 B_1ACE 的体积为 V，若 $V \in (3,5)$，求 λ 的取值范围.

20.（12 分）

已知函数 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2\ln x - ax\,(a \in \mathbf{R})$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2，求证：$f(x_1 + x_2) < 3\ln 2 - 4$.

21.（12 分）

已知抛物线 $C: y^2 = 2px(p > 0)$，准线 l 与 x 轴交于点 $M, A(x_0, y_0)$ 为抛物线 C 上一点，$AD \perp l$ 交 y 轴于点 D.当 $y_0 = 4\sqrt{2}$ 时，$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}$.

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）设直线 AM 与抛物线 C 的另一交点为 B（点 B 在点 A, M 之间），过点 F 且垂直于 x 轴的直线交 AM 于点 N.是否存在实数 λ，使得 $|AM||BN| = \lambda|BM||AN|$？若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = a + t\cos\dfrac{\pi}{4} \\ y = t\sin\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$（$t$ 为参数，$a \in \mathbf{R}$）.以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos\theta + 2\sin\theta$.

（1）写出直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

（2）设 A, B 是曲线 C 上的两点，且 $|AB| = 2$.若直线 l 上存在点 P，使得 $\angle APB = \dfrac{\pi}{2}$，求 a 的取值范围.

23.[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

设函数 $f\left(x\right)=2\left|x+1\right|-\left|x-a\right|+b\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$.

（1）若 $f\left(-3\right)>f\left(1\right)$，求实数 a 的取值范围；

（2）当 $a=5$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 有两个零点 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$，且满足 $x_1+x_2=-4$，求实数 b 的值.

2024 届高三 5 月大联考（全国甲卷）

文科数学·全解全析及评分标准阅卷

注意事项：

1 阅卷前请各学科教研组长，组织本学科改卷老师开会，强调改卷纪律，统一标准.

2 请老师改卷前务必先做一遍试题，了解自己所改试题的答案、评分细则、答题角度后，再开始改卷.

3.请老师认真批阅，不可出现漏改、错改现象，如果不小心漏改或错改了，可以点击回评按钮重评.

4.成绩发布后，如果有学校反馈错评乱评，平台定位阅卷老师，进行通报批评.

5 解答题要在学生的答案中找寻有用的文字说明、证明过程或演算步骤，合理即可给分.

6 解答题不要只看结果，结果正确，但中间的文字说明、证明过程或演算步骤无法建立有效衔接的，不能给满分；同样，结果错误，但正确写出相应的文字说明、证明过程或演算步骤应给分，因第（1）问中结果算错，使后面最终结果出错（过程列式正确），不宜重复扣分.

7 阅卷平台出现的相关问题，如果刷新页面重新登录未能解决，请将问题反馈给学校负责技术的老师（或考试负责人），由其统一在技术 QQ 群里反馈问题并协助解决.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	D	B	B	C	C	B	A	C	D	A

1.C 【解析】由题意，知 $M=\{x|1<x<3\}, N=\{x|-1<x<2\}$，所以 $M\cup N=(-1,3)$.故选 C.

2.A 【解析】由题意，得 $(1-\mathrm{i})^2+2a(1-\mathrm{i})-b=0$，即 $2a-b+(-2-2a)\mathrm{i}=0$，所以 $2a-b=0$，且 $-2-2a=0$，解得 $a=-1,b=-2$，所以 $a+b=-3$.故选 A.

3.D 【解析】从该市 4 月 1 日至 22 日空气质量指数分布的散点图可以看出，空气质量为“优”和“良”的天数超过一半，且为“良”的天数最多；17 日的空气质量指数位于 $(200,300]$ 之间，属于“重度污染”，所以 *A*，*B*，*C* 都正确，而这 22 天的空气质量有变化，不完全是越来越差，所以 *D* 错误.故选 D.

4.B 【解析】由已知，得 $|\vec{a}|=2,\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3}$，又 $\vec{a}\perp(\vec{b}-\lambda\vec{a})$，所以 $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\lambda\vec{a})=0$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}-\lambda\vec{a}^2=0$，所以 $2\sqrt{3}-4\lambda=0$，解得 $\lambda=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.故选 B.

5.B 【解析】执行程序框图，初始值 $s=1,n=1$，判断“否”，

第一次执行循环体：$s=-1,n=2$，判断"否"；

第二次执行循环体：$s=2,n=3$，判断"否"；

第三次执行循环体：$s=-2,n=4$，判断"否"；

第四次执行循环体：$s=3,n=5$，判断"否"；

第五次执行循环体：$s=-3,n=6$，判断"否"；

第六次执行循环体：$s=4,n=7$，判断"是"，输出 $n=7$.故选 B.

6.C 【解析】由 $\frac{2+x}{2-x}>0$，得 $x\in(-2,2)$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$.又

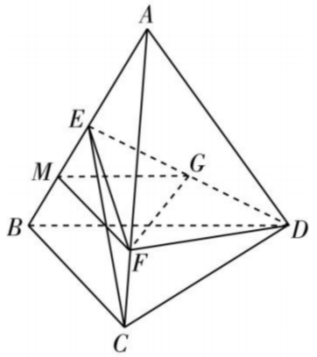
$f(-x)=\sin(-x)\cdot\ln\frac{2-x}{2+x}=(-\sin x)\cdot\left(-\ln\frac{2+x}{2-x}\right)=\sin x\cdot\ln\frac{2+x}{2-x}=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，图象关于 y 轴对称，故 B 错误；因为 $\ln\frac{2+x}{2-x}=\ln\left(\frac{4}{2-x}-1\right)$，所以当 $x\in(0,2)$ 时，$\ln\frac{2+x}{2-x}>0,\sin x>0$，所以 $f(x)>0$，故 A，D 错误.故选 C.

7.C 【解析】如图，连接 DF，平面 EFG 即平面 DEF.由 E 是 AB 的中点和 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FC}$，知 EF 与 BC 相交.对于 A，因为四面体 $ABCD$ 为正四面体，所以 $AD\perp BC,\angle DAB=60^\circ$.若 $AD\perp EF$，又 $BC,EF\subset$ 平面 ABC，且 BC,EF 相交，所以 $AD\perp$ 平面 ABC.又 $AB\subset$ 平面 ABC，所以 $AD\perp AB$，与 $\angle DAB=60^\circ$ 矛盾，所以 A 错误；

对于 B，若 $EF\ //$ 平面 BCD，由 $EF\subset$ 平面 ABC，平面 $ABC\cap$ 平面 $BCD=BC$，得 $BC\ //\ EF$，与 BC,EF 相交矛盾，所以 B 错误；

对于 C，由 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FC}$，知 A,F,C 三点共线，且 $AF=3FC$.取 BE 的中点 M，连接 FM,GM，所以 $AM=3MB$，所以 $MF\ //\ BC$.又 $MF\not\subset$ 平面 $BCD,BC\subset$ 平面 BCD，所以 $MF\ //$ 平面 BCD.又 G 是 DE 的中点，所以 $MG\ //\ BD$.又 $MG\not\subset$ 平面 $BCD,BD\subset$ 平面 BCD，所以 $MG\ //$ 平面 BCD.因为 $MG,MF\subset$ 平面 MFG，且 $MG\cap MF=M$，所以平面 $MFG\ //$ 平面 BCD.因为 $FG\subset$ 平面 MFG，所以 $FG\ //$ 平面 BCD，所以 C 正确；

对于 D，连接 CE，因为 E 是 AB 的中点，所以 $DE\perp AB$.若平面 $EFG\perp$ 平面 ABD，又平面 $EFG\cap$ 平面 $ABD=DE$，所以 $AB\perp$ 平面 EFG.又 $EF\subset$ 平面 EFG，所以 $AB\perp EF$，与 $CE\perp AB$ 矛盾，所以 D 错误.故选 C.



8.B 【解析】由已知，得

$c=\log_3 3\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}, a=\log_7 21=\log_7(3\times 7)=1+\log_7 3>1+\log_7\sqrt{7}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

$b=\log_5 10=\log_5(2\times 5)=1+\log_5 2<1+\log_5\sqrt{5}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以 $a>c>b$.故选 B.

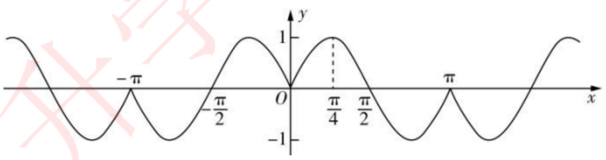
9.A 【解析】设椭圆 C 的半焦距为 c，由题意，得 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}, a+c=3\sqrt{2}$，所以 $c=\sqrt{2}, a=2\sqrt{2}$.设椭圆 C 的左焦点为 F'，则 $F'\left(-\sqrt{2},0\right)$，

所以 $|PA|+|PF|=|PA|+\left(2a-|PF'|\right)=2a+|PA|-|PF'|\geq 2a-|AF'|=4\sqrt{2}-3$.故选 A.

10.C 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(1<d<10), S_1=5, S_2=10+d, S_3=15+3d$，所以 $\sqrt{S_1+4}=3$，$\sqrt{S_2+4}=\sqrt{14+d}, \sqrt{S_3+4}=\sqrt{19+3d}$.由题意，知 $2\sqrt{S_2+4}=\sqrt{S_1+4}+\sqrt{S_3+4}$，即 $2\sqrt{14+d}=3+\sqrt{19+3d}$，整理，得 $d^2-52d+100=0$，解得 $d=2$ 或 $d=50$（舍去）.当 $d=2$ 时，

$S_4=4a_1+\frac{4\times 3}{2}d=4\times 5+\frac{4\times(4-1)}{2}\times 2=32$.故选 C.

11.D 【解析】$f\left(\frac{25}{8}\pi\right)=2\left|\sin\left(3\pi+\frac{1}{8}\pi\right)\right|\cos\left(3\pi+\frac{1}{8}\pi\right)=-2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 A 正确；$f(x)=2|\sin x|\cos x=\begin{cases}\sin 2x(\sin x\geq 0)\\-\sin 2x(\sin x<0)\end{cases}$，画出函数 $f(x)$ 的部分简图，如图：



由图象，知 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，所以 B 正确；

又 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称，由周期性，知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3\pi$ 对称，所以 C 正确；

因为 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，由 $f(x)$ 的周期性，知当 $x\in\left(6\pi,\frac{13}{2}\pi\right)$ 时，$f(x)$

在 $\left(6\pi,\frac{25}{4}\pi\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{25}{4}\pi,\frac{13}{2}\pi\right)$ 上单调递减，所以 D 错误.故选 D.

12.A 【解析】如图，圆锥 SO 的母线长 $l=6$.设圆锥 SO 的底面半径为 r，高为 h，则 $r^2+h^2=36$，圆锥 SO 的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi h\left(36-h^2\right)=\frac{1}{3}\pi\left(36h-h^3\right)$.

令 $f(h)=36h-h^3(h>0)$，则 $f'(h)=36-3h^2=-3\left(h-2\sqrt{3}\right)\left(h+2\sqrt{3}\right)$.令 $f'(h)=0$，得 $h=2\sqrt{3}$ 或 $h=-2\sqrt{3}$.因为 $h>0$，所以 $f(h)$ 在 $\left(0,2\sqrt{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(2\sqrt{3},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以当 $h=2\sqrt{3}$ 时，$f(h)$ 取得最大值，此时 $r^2=24, r=2\sqrt{6}$.

因为 $\angle AOC=120^\circ$，所以 $AC=\sqrt{3}r=6\sqrt{2}$.

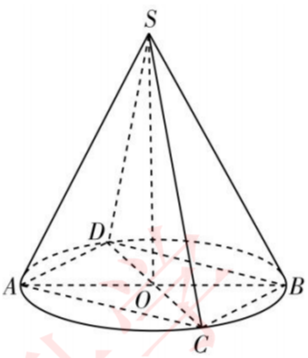
延长 CO 交 $\odot O$ 于点 D，连接 AD,BD,SD，则四边形 $ACBD$ 是平行四边形，所以

$BD\parallel AC, BD=AC=6\sqrt{2}$，

所以直线 AC 与 SB 所成的角为 $\angle SBD$ 或其补角.

在等腰三角形 SBD 中，$SB=SD=6, BD=6\sqrt{2}$，所以 $\cos\angle SBD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以直线 AC 与 SB 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.故选 A.



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.2 【解析】因为 $f'(x)=ae^x-1$，所以 $f'(1)=ae-1=2e-1$，所以 $a=2$.故填 2.

14.$\frac{7}{4}$ 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $a_2=\frac{1}{2}, a_5=4=a_2q^3$，得 $q^3=8$，所以 $q=2$，所以 $a_1=\frac{1}{4}$，

$S_3=\frac{a_1\left(1-q^3\right)}{1-q}=\frac{7}{4}$.故填 $\frac{7}{4}$.

15. $\dfrac{2}{5}$　【解析】设 3 名男员工分别为 A,B,C，3 名女员工分别为 X,Y,Z，其情况如下表：

	钳工	车工	焊工
男员工	A	B	C
女员工	X	Y	Z

则从 6 人中选出 2 人的基本事件有 $(A,B),(A,C),(A,X),(A,Y),(A,Z),(B,C),(B,X),(B,Y)$，$(B,Z),(C,X),(C,Y),(C,Z),(X,Y),(X,Z),(Y,Z)$，共 15 个，其中满足条件的基本事件有 (A,Y)，$(A,Z),(B,X),(B,Z),(C,X),(C,Y)$，共 6 个，所以选出的 2 人恰好是 1 名男员工和 1 名女员工，且他们来自不同车间的概率 $P=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$.故填 $\dfrac{2}{5}$.

16. 2；$\dfrac{7}{15}$　【解析】由题意，知 $A(-a,0)$，设双曲线 C 的焦距为 $2c$，则 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$.

由 $\overrightarrow{MF_2}=4\overrightarrow{NA}$，得 $MF_2 \mathbin{/\!/} NA$，且 $|MF_2|=4|NA|$，所以 $|F_2A|=3|AF_1|,|MN|=3|NF_1|$，所以 $c+a=3(c-a)$，即 $c=2a$，所以双曲线 C 的离心率 $e=2$.

如图，连接 NF_2，设 $|MF_2|=m$，则

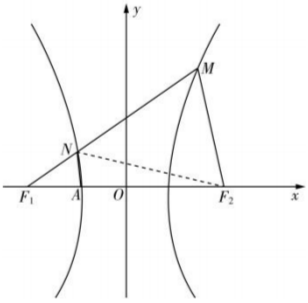
$|MF_1|=2a+m,|NF_1|=\dfrac{1}{4}(2a+m),|NF_2|=2a+\dfrac{1}{4}(2a+m)=\dfrac{1}{4}(10a+m)$.在 $\triangle F_1NF_2$ 和 $\triangle F_1MF_2$ 中，由余弦定理的推论，得

$$\cos\angle NF_1F_2=\frac{\frac{1}{16}(2a+m)^2+16a^2-\frac{1}{16}(10a+m)^2}{2\times\frac{1}{4}(2a+m)\times 4a}=\frac{(2a+m)^2+16a^2-m^2}{2\times(2a+m)\times 4a}$$，化简整理，得 $m=\dfrac{5}{2}a$，

所以在 $\triangle F_1MF_2$ 中，由余弦定理的推论，得

$$\cos\angle F_1MF_2=\frac{(2a+m)^2+m^2-(4a)^2}{2(2a+m)m}=\frac{\left(2a+\frac{5}{2}a\right)^2+\left(\frac{5}{2}a\right)^2-(4a)^2}{2\left(2a+\frac{5}{2}a\right)\times\frac{5}{2}a}=\frac{7}{15}.$$

故填 2；$\dfrac{7}{15}$.



三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

【解析】（1）由 $ab=4b-4c\cos A$ 和正弦定理，

得 $b\sin A=4\sin B-4\sin C\cos A$

$=4\sin\left(A+C\right)-4\sin C\cos A$

$=4\sin A\cos C$.

因为 $\sin A\neq 0$，所以 $b=4\cos C$.

因为 $C=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $b=2\sqrt{3}$.

（2）由余弦定理，得 $c^2=b^2+a^2-2ab\cos\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $12+a^2-6a=3$，

即 $(a-3)^2=0$，解得 $a=3$

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{3}\times\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

18.（12 分）

【解析】（1）由频率分布直方图，

知男生组得分在 80 分以上（含 80 分）的有 $\left(0.010+0.005\right)\times 10\times 60=9$（人），

女生组得分在 80 分以上（含 80 分）的有 $\left(0.025+0.010\right)\times 10\times 60=21$（人），

男生占比为 $\dfrac{9}{9+21}$，女生占比为 $\dfrac{21}{9+21}$，

所以男生组分得票数为 $\dfrac{9}{9+21}\times 10=3$，

女生组分得票数为 $\dfrac{21}{9+21}\times 10=7$，

所以男生组、女生组分别得 3 张和 7 张该戏剧的演出票.

（2）由（1），知男生组得分在 80 分以上（含 80 分）的有 9 人，80 分以下的有 51 人；女生组得分在 80 分以上（含 80 分）的有 21 人，80 分以下的有 39 人，

所以得如下 2×2 列联表：

	男生	女生	合计
$x\geq80$	9	21	30
$x<80$	51	39	90
合计	60	60	120

根据列联表中数据计算，得 $K^2=\dfrac{120\times(9\times39-21\times51)^2}{60\times60\times30\times90}$

$=\dfrac{32}{5}=6.4$

<6.635,

根据临界值表，知没有99%的把握认为学生喜爱戏曲与性别有关.

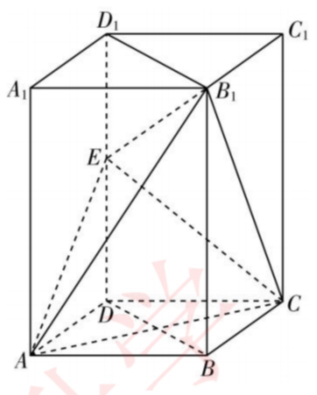
19.（12 分）

【解析】（1）如图，连接 BD,B_1D_1.因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱，所以底面 $ABCD$ 为正方形，

且 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $AC\perp BD$.又 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AC\perp BB_1$.

又 $BD,BB_1\subset$ 平面 $BDD_1B_1,BD\cap BB_1=B$，所以 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1.

又 $B_1E\subset$ 平面 BDD_1B_1，所以 $AC\perp B_1E$.



（2）当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，E 为 DD_1 的中点，所以 $D_1E=DE=\dfrac{1}{2}DD_1=\dfrac{1}{2}AA_1=2$，

所以 $AE=2\sqrt{2},B_1E=\sqrt{D_1E^2+D_1B_1^2}=2\sqrt{3}$.

又 $AB_1=2\sqrt{5}$，所以 $AE^2+B_1E^2=AB_1^2$，所以 $AE\perp B_1E$.

由（1）知，$AC\perp B_1E$.

因为 $AC, AE \subset$ 平面 $ACE, AC \cap AE = A$，所以 $B_1E \perp$ 平面 ACE.

（3）因为 E 为棱 DD_1 上一点（含端点），且 $DE = \lambda DD_1$，所以 $\lambda \in [0,1]$.

又 $AC = 2\sqrt{2}$，

所以

$V = V_{A-BDEB_1} + V_{C-BDEB_1} - V_{E-ACD} - V_{B_1-ABC} = 2V_{A-BDEB_1} - V_{E-ACD} - V_{B_1-ABC} = \frac{16}{3}(1+\lambda) - \frac{8\lambda}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}(1+\lambda)$.

因为 $V \in (3,5)$，所以 $3 < \frac{8}{3}(1+\lambda) < 5$，

解得 $\frac{1}{8} < \lambda < \frac{7}{8}$，即 λ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right)$.

20.（12 分）

【解析】（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x) = x + \frac{2}{x} - a = \frac{x^2 - ax + 2}{x}$.

①若 $a \le 0$，则 $f'(x) > 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

②若 $a > 0$，令 $x^2 - ax + 2 = 0$，此时 $\Delta = a^2 - 8$，

i）当 $\Delta = a^2 - 8 \le 0$，即 $0 < a \le 2\sqrt{2}$ 时，$f'(x) > 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

ii）当 $\Delta = a^2 - 8 > 0$，即 $a > 2\sqrt{2}$ 时，

方程 $x^2 - ax + 2 = 0$ 的两个实数根为 $x_3 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}, x_4 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}$，且 $0 < x_3 < x_4$，

当 $x \in (0, x_3)$ 或 $x \in (x_4, +\infty)$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x \in (x_3, x_4)$ 时，$f'(x) < 0$，

所以 $f(x)$ 在 (x_3, x_4) 上单调递减，在 $(0, x_3), (x_4, +\infty)$ 上单调递增.

综上，当 $a \le 2\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a > 2\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}\right), \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增，

在 $\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}\right)$ 上单调递减.

（2）$f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2，结合（1），知 $a > 2\sqrt{2}$，且 x_1, x_2 是方程 $x^2 - ax + 2 = 0$ 的两个实数根，

所以 $x_1 + x_2 = a, x_1x_2 = 2$，

所以 $f\left(x_1+x_2\right)=f\left(a\right)=2\ln a-\frac{1}{2}a^2$.

令 $g\left(a\right)=2\ln a-\frac{1}{2}a^2(a>2\sqrt{2})$，则 $g'\left(a\right)=\frac{2}{a}-a=\frac{2-a^2}{a}=-\frac{\left(a-\sqrt{2}\right)\left(a+\sqrt{2}\right)}{a}$.

因为 $a>2\sqrt{2}$，所以 $g'\left(a\right)<0$，所以 $g\left(a\right)$ 在 $\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $g\left(a\right)<g\left(2\sqrt{2}\right)=3\ln 2-4$，即 $f\left(x_1+x_2\right)<3\ln 2-4$.

21.（12 分）

【解析】（1）因为当 $y_0=4\sqrt{2}$ 时，$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}$，所以四边形 $MFAD$ 为平行四边形，

所以 $|AD|=|MF|=p$, 即 $x_0=p$, 所以 $A\left(p,4\sqrt{2}\right)$,

将 $A\left(p,4\sqrt{2}\right)$ 代入 $y^2=2px$，得 $32=2p^2$，

解得 $p=4$, (4 分)

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$.

（2）如图，由题意，得 $M\left(-2,0\right)$.设直线 AM 的方程为 $x=my-2\left(m\neq 0\right)$, $B\left(x_1,y_1\right)$，则 $N\left(2,\frac{4}{m}\right)$.

由 $\begin{cases} y^2=8x \\ x=my-2 \end{cases}$，得 $y^2-8my+16=0, \Delta=64m^2-64>0$，所以 $y_0+y_1=8m, y_0y_1=16$.

假设存在实数 λ，使得 $|AM||BN|=\lambda|BM||AN|$，即 $\frac{|AM||BN|}{|BM||AN|}=\lambda$.

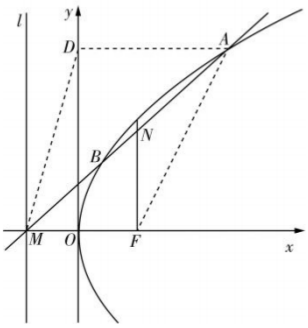
由题意，知 $\frac{|AM|}{|BM|}=\frac{|y_0|}{|y_1|}, \frac{|BN|}{|AN|}=\frac{|2-x_1|}{|x_0-2|}=\frac{|my_1-4|}{|my_0-4|}$,

所以 $\frac{|AM|}{|BM|}\cdot\frac{|BN|}{|AN|}=\frac{|y_0|}{|y_1|}\cdot\frac{|my_1-4|}{|my_0-4|}=\frac{|my_0y_1-4y_0|}{|my_0y_1-4y_1|}$.

又 $y_0+y_1=8m, y_0y_1=16$,

所以 $\frac{|AM|}{|BM|}\cdot\frac{|BN|}{|AN|}=\frac{|my_0y_1-4y_0|}{|my_0y_1-4y_1|}=\frac{|16m-4y_0|}{|16m-4\left(8m-y_0\right)|}=\frac{|16m-4y_0|}{|4y_0-16m|}=1$,

即存在实数 $\lambda=1$，使得 $|AM||BN|=\lambda|BM||AN|$ 成立.



（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

【解析】（1）由$\begin{cases} x=a+t\cos\dfrac{\pi}{4} \\ y=t\sin\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$（$t$ 为参数，$a\in\mathbf{R}$），消去参数 t，得直线 l 的普通方程为 $x-y-a=0$.

由 $\rho=2\cos\theta+2\sin\theta$，得 $\rho^2=2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$.

将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入 $\rho^2=2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$，

得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-2y=0$，即 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

（2）由（1），知曲线 C 表示圆心为 $(1,1)$，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆，l 为一条直线.

设弦 AB 的中点为 M，

因为 $|AB|=2$，所以 $|CM|=1$，

所以点 M 在以 $C(1,1)$ 为圆心，1 为半径的圆上.

又 $\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $|PM|=1$，所以点 P 在以 M 为圆心，1 为半径的圆上.

依题意，直线 l 上存在点 P，使得 $|PC|\le 2$,

所以点 C 到直线 l 的距离 $d\le 2$，即 $d=\dfrac{|a|}{\sqrt{2}}\le 2$，

所以 $-2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}$，

所以 a 的取值范围为 $\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$.

23.[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

【解析】（1）若 $f(-3)>f(1)$，则 $2\times|-3+1|-|-3-a|+b>2\times|1+1|-|1-a|+b$，

即 $|3+a|<|1-a|$,

两边平方，得$9+6a+a^2<a^2-2a+1$，即$8a<-8$，

解得$a<-1$，所以实数a的取值范围是$\left(-\infty,-1\right)$.

（2）因为$a=5$，所以函数$f\left(x\right)=2\left|x+1\right|-\left|x-5\right|+b=\begin{cases}-x-7+b\left(x\le -1\right)\\3x-3+b(-1<x<5)\\x+7+b\left(x\ge 5\right)\end{cases}$.

观察图象（图略），知函数$f\left(x\right)=2\left|x+1\right|-\left|x-5\right|+b$在$\left(-\infty,-1\right]$上单调递减，在$\left(-1,5\right)$和$\left[5,+\infty\right)$上单调递增，且$f\left(-1\right)=-6+b, f\left(5\right)=12+b$，

所以①当$-12<b<6$时，$x_1=-7+b,x_2=\frac{3-b}{3}$.由$x_1+x_2=\frac{-18+2b}{3}=-4$，解得$b=3$；

②当$b\le -12$时，$x_1=-7+b,x_2=-7-b$，此时$x_1+x_2=-14$，与$x_1+x_2=-4$矛盾，舍去.

综上，实数b的值为3.