成都市 2021 级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. B； 2. C； 3. B； 4. C； 5. A； 6. A； 7. D； 8. B； 9. C； 10. D； 11. C； 12. D.

第Ⅱ卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. 三棱柱,三棱锥,圆锥等(其他正确答案同样给分)； 14. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$；

15. $8\sqrt{3}$； 16. ②③④.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(Ⅰ)设转换公式中转换分 y 关于原始成绩 x 的一次函数关系式为 $y=ax+b$.

则 $\begin{cases}78=84a+b,\\71=78a+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\dfrac{7}{6},\\b=-20.\end{cases}$ ……3 分

∵转换分的最高分为 85,

∴ $85=\dfrac{7}{6}x-20$. 解得 $x=90$.

故该市本次化学原始成绩 B 等级中的最高分为 90 分. ……6 分

(Ⅱ)∵ $10(0.005+0.010+0.012+0.015+0.033+a)=1$,

∴ $a=0.025$. ……9 分

设化学原始成绩 B 等级中的最低分为 x,

∵ $10\times0.010+10\times0.015+10\times0.025=0.5$,

∴ $x=70$.

综上,化学原始成绩 B 等级中的最低分为 70. ……12 分

18. 解:(Ⅰ)当 $n=1$ 时, $a_1=S_1(2)=0$. ……1 分

当 $n\geqslant2$ 时, $a_n=S_n(2)-S_{n-1}(2)=(2+2^2+\cdots2^n-2)-(2+2^2+\cdots2^{n-1}-2)=2^n$.

……5 分

又当 $n=1$ 时, $a_1=0$ 不满足上式,

所以 $a_n=\begin{cases}0, & n=1,\\2^n, & n\geqslant2.\end{cases}$ ……6 分

(Ⅱ)∵ $S_{2024}(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^{2024}-2$,

∴ $S'_{2024}(x)=1+2x+3x^2+\cdots+2024x^{2023}$. ……7 分

$S'_{2024}(2)=1+2\times2+3\times2^2+\cdots+2024\times2^{2023}$ ……①,

$2S'_{2024}(2)=2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+2024\times2^{2024}$ ……②,

①－②得，$-S'_{2024}(2)=1+1\times 2+1\times 2^2+\cdots+1\times 2^{2023}-2024\times 2^{2024}$ ……10 分

$$=\frac{1-2^{2024}}{1-2}-2024\times 2^{2024}=-2023\times 2^{2024}-1.$$ ……11 分

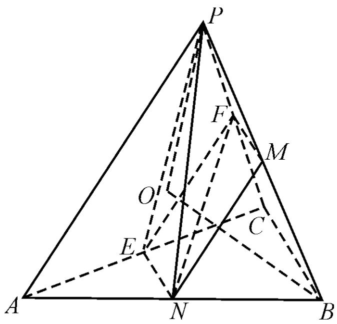
$\therefore S'_{2024}(2)=2023\times 2^{2024}+1.$ ……12 分

19. 解：(Ⅰ)在△ PBA 中，$\because M,N$ 是棱 PB,AB 的中点，

$\therefore MN /\!/ PA$．同理可得 $EF /\!/ PA$． ……3 分

$\therefore MN /\!/ EF$．

$\therefore M,N,E,F$ 四点共面. ……5 分



(Ⅱ)连接 NF．

由(Ⅰ)，$MN=EF=\frac{1}{2}PA$，

∴四边形 $MNEF$ 为平行四边形.

$\therefore V_{P-MNEF}=2V_{P-NFE}=2V_{N-PEF}=V_{B-PEF}$． ……8 分

∵四面体 $P-ABC$ 为正四面体，

$\therefore B$ 在底面 PAC 内的射影 O 为△ PAC 的中心. ……9 分

$\therefore OP=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

在△ PBO 中，$BO=\sqrt{PB^2-PO^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$． ……10 分

$\therefore V_{B-PEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle PEF}\cdot BO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$．

$\therefore V_{P-MNEF}=\frac{\sqrt{2}}{6}$. ……12 分

20. 解：(Ⅰ)设 $M(x_1,y_1)$，$S(x_1,-y_1)$．

$\because k_{AM}=\frac{y_1}{x_1+a}$，$k_{BS}=\frac{-y_1}{x_1-a}$， ……1 分

$\therefore k_{AM}\cdot k_{BS}=\frac{y_1}{x_1+a}\cdot\frac{-y_1}{x_1-a}=\frac{-y_1^2}{x_1^2-a^2}$． ……2 分

$\because M(x_1,y_1)$ 在双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5}=1(a>0)$ 上，

$\therefore k_{AM}\cdot k_{BS}=\frac{-y_1^2}{x_1^2-a^2}=\frac{-5(\frac{x_1^2}{a^2}-1)}{x_1^2-a^2}=-\frac{5}{a^2}=-\frac{5}{4}$．解得 $a=2$. ……4 分

∴双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. ……5 分

(Ⅱ)设 $N(x_2,y_2)$，直线 MN：$x=my+3$.

由 $\begin{cases}x=my+3,\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1\end{cases}$ 消去 x，得 $(5m^2-4)y^2+30my+25=0$.

$m\neq\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\Delta=400(m^2+1)>0$.

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{-30m}{5m^2-4}$, $y_1y_2=\dfrac{25}{5m^2-4}$. ……6 分

直线 BM：$y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，

令 $x=1$,解得 $y_P=\dfrac{-y_1}{x_1-2}$. 同理可得 $y_Q=\dfrac{-y_2}{x_2-2}$. ……7 分

∵以 PQ 为直径的圆的方程为 $(x-1)(x-1)+(y+\dfrac{y_1}{x_1-2})(y+\dfrac{y_2}{x_2-2})=0$，

……8 分

令 $y=0$,得 $(x-1)^2+\dfrac{y_1}{x_1-2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-2}=0$.

$$\therefore (x-1)^2+\frac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=(x-1)^2+\frac{y_1y_2}{(my_1+1)(my_2+1)}$$

$$=(x-1)^2+\frac{\frac{25}{5m^2-4}}{m^2\cdot\frac{25}{5m^2-4}+m\cdot\frac{-30m}{5m^2-4}+1}$$

$$=(x-1)^2+\frac{25}{25m^2-30m^2+5m^2-4}$$

$$=(x-1)^2-\frac{25}{4}=0.$$ ……10 分

$\therefore (x-1)^2=\dfrac{25}{4}$,解得 $x=-\dfrac{3}{2}$ 或 $x=\dfrac{7}{2}$.

∴以 PQ 为直径的圆恒过点 $(-\dfrac{3}{2},0)$，$(\dfrac{7}{2},0)$. ……12 分

21. 解：(Ⅰ) ∵ $f'(x)=e^{x-1}+\dfrac{2}{(x+1)^2}$. ……1 分

当 $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

∴函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(-1,+\infty)$ 上单调递增； ……2 分

∵当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f(x)>0$； ……3 分

当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$f(1)=0$. ……4 分

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 上有且仅有一个零点； ……5 分

(Ⅱ) ∵ $af(x)\leqslant\dfrac{e^x}{e}+\ln x-1$，

$\therefore a(\dfrac{e^x}{e}-\dfrac{2}{x+1})-\dfrac{e^x}{e}-\ln x+1\leqslant 0$.

设 $g(x)=a(\dfrac{e^x}{e}-\dfrac{2}{x+1})-\dfrac{e^x}{e}-\ln x+1=(a-1)e^{x-1}-\ln x-\dfrac{2a}{x+1}+1$.

(i)当 $a>1$ 时,由 $x\to+\infty$, $f(x)\to+\infty$,不合题意，

∴当 $a>1$ 时,不合题意. ……7 分

(ii)当 $a\leqslant 1$ 时,由(Ⅰ) $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $f(1)=0$，$\therefore f(x)\geqslant 0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立. ……8 分

$\therefore g(x)=a(\frac{e^x}{e}-\frac{2}{x+1})-\frac{e^x}{e}-\ln x+1\leqslant\frac{e^x}{e}-\frac{2}{x+1}-\frac{e^x}{e}-\ln x+1$

$=-\frac{2}{x+1}-\ln x+1$. ……10 分

设 $n(x)=-\frac{2}{x+1}-\ln x+1$.

$\therefore n'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x}=\frac{2x-(x+1)^2}{x(x+1)^2}=\frac{-(x^2+1)}{x(x+1)^2}$.

$\because n'(x)<0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立，$\therefore n(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减.

又 $n(1)=0$，$\therefore n(x)<0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上恒成立.

$\therefore a(\frac{e^x}{e}-\frac{2}{x+1})\leqslant e^{x-1}+\ln x-1$. 满足题意.

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. ……12 分

22. 解：(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程可得 $(x-2)^2+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$， ……1 分

化简得曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=1$. ……3 分

(Ⅱ)曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta+3=0$. ……5 分

设 $A(\rho_1,\theta_1)$，$B(\rho_1,\theta_1+\frac{\pi}{2})$，$M(\rho,\theta)$. ……6 分

$\because \rho=\frac{\sqrt{2}}{2}\rho_1,\theta=\theta_1+\frac{\pi}{4}$，

$\therefore \rho_1=\sqrt{2}\rho,\theta_1=\theta-\frac{\pi}{4}$. ……8 分

$\therefore (\sqrt{2}\rho)^2-4\times\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})+3=0$.

$\therefore M$ 的轨迹的极坐标方程为 $\rho^2-2\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})+\frac{3}{2}=0$. ……10 分

23. 解：(Ⅰ)$\because |x+a|+b<4$，易知 $4-b>0$，

$\therefore b-a-4<x<4-a-b$. ……3 分

$\because f(x)<4$ 的解集为 $\{x\,|\,0<x<6\}$，

$\therefore \begin{cases}b-a-4=0,\\4-a-b=6\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=1.\end{cases}$ ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $f(x)=|x-3|+1$，

$\therefore f(x)$ 的最小值为 1，即 $m+2n+3p=1$. ……6 分

$\therefore \frac{1}{m+2p}+\frac{1}{2n+p}=(\frac{1}{m+2p}+\frac{1}{2n+p})(m+2p+2n+p)=1+1+\frac{2n+p}{m+2p}+\frac{m+2p}{2n+p}\geqslant 4$. ……9 分

当且仅当 $m+2p=2n+p=\frac{1}{2}$ 时，等号成立.

$\therefore \frac{1}{m+2p}+\frac{1}{2n+p}$ 的最小值为 4. ……10 分