

成都市 2021 级高中毕业班第一次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题, 共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分, 共 60 分)

1. D; 2. C; 3. A; 4. D; 5. C; 6. B; 7. B; 8. A; 9. C; 10. A; 11. D; 12. C.

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分, 共 20 分)

13. $(0, 2)$; 14. $5x - y - 2 = 0$; 15. 2 或 2022; 16. $\frac{25\pi}{2}$.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I) 连接 A_1C_1 .

\because 正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 AA_1 的中点, $AB = 2, AA_1 = 4$,

$\therefore A_1C_1 = 2\sqrt{2}, A_1M = AM = 2, DM = 2\sqrt{2}, C_1D = 2\sqrt{5}, MC_1 = 2\sqrt{3}$2 分

$\therefore C_1M^2 + DM^2 = DC_1^2$,

$\therefore C_1M \perp DM$3 分

同理可得 $C_1M \perp BM$4 分

$\therefore DM \cap BM = M, DM \subset$ 平面 $BDM, BM \subset$ 平面 BDM ,5 分

$\therefore C_1M \perp$ 平面 BDM6 分

(II) 以 D 为坐标原点, $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Dxyz$. 则 $D(0, 0, 0), M(2, 0, 2), B(2, 2, 0), C_1(0, 2, 4)$,

$\overrightarrow{DB} = (2, 2, 0), \overrightarrow{DM} = (2, 0, 2), \overrightarrow{DC_1} = (0, 2, 4)$7 分

设平面 DBM 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$.

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DM} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 2x_1 + 2y_1 = 0, \\ 2x_1 + 2z_1 = 0. \end{cases}$$

令 $z_1 = 1$, 得 $\mathbf{n} = (-1, 1, 1)$8 分

设平面 DBC_1 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$.

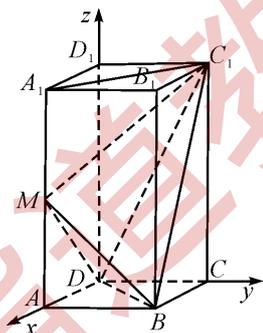
$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DC_1} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 2x_2 + 2y_2 = 0, \\ 2y_2 + 4z_2 = 0. \end{cases}$$

令 $z_2 = 1$, 得 $\mathbf{m} = (2, -2, 1)$9 分

$$\therefore \cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{-3}{\sqrt{3} \times 3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \text{.....11 分}$$

由二面角 $C_1 - BD - M$ 为锐角,

\therefore 所求二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$12 分



18. 解: (I) 由列联表数据可得,

$$K^2 = \frac{200 \times (60 \times 80 - 40 \times 20)^2}{100 \times 100 \times 120 \times 80} = \frac{100}{3} \approx 33.333 > 10.828. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

\therefore 有 99.9% 的把握认为该校高一年级体育模块化课程的选择与性别有关. $\dots\dots 5 \text{ 分}$

(II) 随机变量 X 的取值可能为 0, 1, 2.

$$\therefore P(X=0) = \frac{C_3^0 C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}, P(X=1) = \frac{C_3^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{5}, P(X=2) = \frac{C_3^2 C_3^0}{C_6^2} = \frac{1}{5}, \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (I) $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6})$. $\dots\dots 2 \text{ 分}$

由 $f(A) = 2 \sin(2A + \frac{\pi}{6}) = 1$, 即 $\sin(2A + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

$\therefore \triangle ABC$ 为锐角三角形, $2A + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$,

$\therefore 2A + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

$\therefore A = \frac{\pi}{3}$. $\dots\dots 4 \text{ 分}$

(II) $\because b=1$, 由余弦定理, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = c^2 - c + 1$.

$\therefore 2a^2 + bc = 2c^2 - c + 2$. $\dots\dots 6 \text{ 分}$

由正弦定理, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

$$\therefore c = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin(\frac{2\pi}{3} - B)}{\sin B} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{2 \tan B} + \frac{1}{2}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$\therefore \triangle ABC$ 是锐角三角形,

$\therefore 0 < B < \frac{\pi}{2}$, 且 $C = \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2}$.

$\therefore B \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$, $\tan B \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$.

$\therefore c = \frac{\sqrt{3}}{2 \tan B} + \frac{1}{2} \in (\frac{1}{2}, 2)$. $\dots\dots 10 \text{ 分}$

$\therefore 2a^2 + bc = 2c^2 - c + 2 \in (2, 8)$.

综上, $2a^2 + bc$ 的取值范围为 $(2, 8)$.

.....12分

20. 解:(I) 如图, 取 AB 的中点 M , 分别过 A, B, M 作准线的垂线, 依次交准线于 A_1, B_1, M_1 .

.....1分

$$\therefore |AA_1| = |AF|, |BB_1| = |BF|, |MM_1| = \frac{1}{2}(|AA_1| + |BB_1|),$$

.....2分

$$\therefore |MM_1| = \frac{1}{2}(|AF| + |BF|) = \frac{|AB|}{2}.$$

.....3分

\therefore 以 AB 为直径的圆和直线 $x = -1$ 相切.

.....4分

(II) 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = x + m, \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{ 消去 } x, \text{ 得 } y^2 - 4y + 4m = 0.$$

$$\text{由 } \Delta = 16 - 16m > 0, \text{ 得 } m < 1.$$

$$\therefore y_1 + y_2 = 4, y_1 y_2 = 4m.$$

.....6分

$$\text{由 } \triangle FPQ \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \cdot |PQ| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+1} \cdot |y_1 - y_2| \cdot \frac{|1+m|}{\sqrt{2}},$$

.....7分

$$\therefore |1+m| \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = 4.$$

$$\therefore |1+m| \sqrt{16 - 16m} = 4, \text{ 即 } m(m^2 + m - 1) = 0.$$

.....9分

$$\therefore m < 1,$$

$$\therefore m = 0 \text{ 或 } m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

.....11分

$$\therefore \text{直线 } l_2 \text{ 的方程为 } y = x \text{ 或 } y = x + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } y = x + \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

.....12分

21. 解:(I) $\therefore f'(x) = 2e^x - a$.

.....1分

若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增;

.....2分

若 $a > 0$,

当 $x \in (-\infty, \ln \frac{a}{2})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\ln \frac{a}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

.....3分

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln \frac{a}{2})$ 上单调递减, 在 $(\ln \frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

.....4分

(II) 当 $a = e$ 时, 要 $2e^x - ex > e(1 - \cos x)$ 成立.

即证 $2e^{x-1} > x + 1 - \cos x$ 成立,

① 当 $x \leq 0$ 时, 设函数 $k(x) = x + 1 - \cos x$,

$$\therefore k'(x) = 1 + \sin x \geq 0,$$

$\therefore k(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增.

$\therefore k(x) \leq k(0) = 0.$

$\therefore 2e^{x-1} > 0 \geq x + 1 - \cos x$ 成立.

……7分

②当 $x > 0$ 时, 要证 $2e^{x-1} > x + 1 - \cos x$ 成立,

即证 $2e^{x-1} - 2x > 1 - \cos x - x.$

设函数 $h(x) = 2e^{x-1} - 2x (x > 0),$

$\therefore h'(x) = 2e^{x-1} - 2,$

由 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $h'(1) = 0.$

\therefore 当 $x \in (0, 1), h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty), h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增.

$\therefore h(x) \geq h(1) = 0.$

……9分

设函数 $g(x) = 1 - \cos x - x (x > 0),$

$\therefore g'(x) = \sin x - 1 \leq 0.$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore g(x) < g(0) = 0.$

$\therefore h(x) \geq 0 > g(x),$ 上式得证.

……11分

综上所述, $f(x) > e(1 - \cos x)$ 成立.

……12分

22. 解: (I) \therefore 当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时, 直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases},$ ……1分

化简得直线 C_1 的普通方程为 $\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0.$

……3分

(II) \therefore 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos 2\theta = 2,$

$\therefore \rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta = 2.$

……4分

$\therefore x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta,$

\therefore 曲线 C_2 的普通方程为 $x^2 - y^2 = 2.$

……5分

将直线 C_1 的参数方程 $\begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ 代入 $x^2 - y^2 = 2$ 得 $t^2 \cos 2\alpha + 4t \cos \alpha + 2 = 0.$

$\therefore \cos 2\alpha \neq 0,$ 可得 $\alpha \neq \frac{\pi}{4}, \Delta = 16 \cos^2 \alpha - 8 \cos 2\alpha = 8 > 0.$

设 A, B 两点对应的参数分别为 $t_1, t_2,$ 则 $t_1 + t_2 = -\frac{4 \cos \alpha}{\cos 2\alpha}, t_1 t_2 = \frac{2}{\cos 2\alpha}.$ ……7分

$\therefore |PA| \cdot |PB| = |t_1 t_2| = \left| \frac{2}{\cos 2\alpha} \right| = 4.$

……8分

$\therefore 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{3}.$

……10分

23. 解: (I) 当 $a = 4$ 时, $f(x) = |2x - 4| + |x + 1|.$ ……1分

①当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = 3x - 3 \geq 7,$ 解得 $x \geq \frac{10}{3};$ ……2分

②当 $x \leq -1$ 时, $f(x) = 3 - 3x \geq 7$, 解得 $x \leq -\frac{4}{3}$;3分

③当 $-1 < x < 2$ 时, $f(x) = -x + 5 \geq 7$, 解得 $x \leq -2$, 不合题意.4分

综上, 不等式 $f(x) \geq 7$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{4}{3}] \cup [\frac{10}{3}, +\infty)$5分

(II) 由题, ①当 $a < 0$ 时, $f(x) > 2a$ 显然成立.6分

②当 $a \geq 0$ 时, $f(x) = |2x - a| + |x + 1| = \begin{cases} -3x + a - 1, & x \leq -1, \\ -x + a + 1, & -1 < x < \frac{a}{2}, \\ 3x - a + 1, & x \geq \frac{a}{2}. \end{cases}$ 7分

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 单减, 在 $(-1, \frac{a}{2})$ 单减, 在 $[\frac{a}{2}, +\infty)$ 单调递增.

$\therefore f(x)_{\min} = f(\frac{a}{2}) = \frac{a}{2} + 1$8分

由 $f(x) > 2a$ 恒成立, 故 $f(x)_{\min} = \frac{a}{2} + 1 > 2a$, 解得 $a < \frac{2}{3}$.

$\therefore 0 \leq a < \frac{2}{3}$9分

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, \frac{2}{3})$10分