

成都市 2021 级高中毕业班第一次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题, 共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分, 共 60 分)

1. B; 2. C; 3. A; 4. D; 5. C; 6. B; 7. B; 8. A; 9. C; 10. B; 11. D; 12. C.

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分, 共 20 分)

13. (0, 2); 14. $5x - y - 2 = 0$; 15. 2022; 16. 100π .

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I)如图, 连接 A_1C_1 .

∵ 正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 AA_1 的中点, $AB = 2, AA_1 = 4$,

∴ $A_1C_1 = 2\sqrt{2}, A_1M = AM = 2, DM = 2\sqrt{2}, C_1D = 2\sqrt{5}, MC_1 = 2\sqrt{3}$2 分

∴ $C_1M^2 + DM^2 = DC_1^2$,

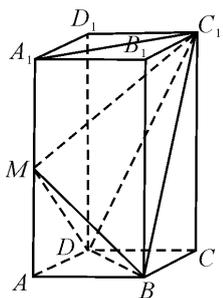
∴ $C_1M \perp DM$.

同理可得 $C_1M \perp BM$.

∴ $DM \cap BM = M, DM \subset$ 平面 $BDM, BM \subset$ 平面 BDM ,

∴ $C_1M \perp$ 平面 BDM .

(II)由(I)知, $BM = DM = BD = 2\sqrt{2}$, 且 $C_1M \perp$ 平面 BDM .



.....3 分

.....4 分

.....5 分

.....6 分

.....7 分

∴ $V_{M-BC_1D} = V_{C_1-BDM} = \frac{1}{3} S_{\triangle BDM} \cdot C_1M = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 \times 2\sqrt{3} = 4$11 分

∴ 三棱锥 $C_1 - BDM$ 的体积为 4.12 分

18. 解:(I)由列联表数据可得,

$$K^2 = \frac{200 \times (60 \times 80 - 40 \times 20)^2}{100 \times 100 \times 120 \times 80} = \frac{100}{3} \approx 33.333 > 10.828. \quad \text{.....4 分}$$

∴ 有 99.9% 的把握认为该校高一年级体育模块化课程的选择与性别有关.5 分

(II)设篮球模块课程的前 3 名为 A_1, A_2, A_3 , 羽毛球模块课程的前 3 名为 B_1, B_2, B_3 .

则从这 6 人中随机选 2 人的基本事件有: $(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, B_1), (A_1, B_2),$

$(A_1, B_3), (A_2, A_3), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, B_3), (A_3, B_1), (A_3, B_2), (A_3, B_3),$

$(B_1, B_2), (B_1, B_3), (B_2, B_3)$, 共 15 个.9 分

其中选出的这 2 人来自不同模块化课程的基本事件有: $(A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, B_3),$

$(A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, B_3), (A_3, B_1), (A_3, B_2), (A_3, B_3)$, 共 9 个.11 分

故所求概率为 $P = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$12 分

19. 解:(I) $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 1 = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$.

.....2分

由 $f(A) = 2\sin(2A + \frac{\pi}{6}) = 1$, 即 $\sin(2A + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形, $2A + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$,

$\therefore 2A + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

$\therefore A = \frac{\pi}{3}$.

.....4分

(II) 由正弦定理, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{2\sin B}, c = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin(\frac{2\pi}{3} - B)}{\sin B}$.

.....7分

$\therefore a + c = \frac{\sqrt{3}}{2\sin B} + \frac{\sin(\frac{2\pi}{3} - B)}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}(\cos B + 1)}{2\sin B} + \frac{1}{2}$,

$= \frac{2\sqrt{3}\cos^2 \frac{B}{2}}{4\sin \frac{B}{2}\cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\tan \frac{B}{2}} + \frac{1}{2}$.

.....9分

$\because \triangle ABC$ 是锐角三角形,

$\therefore 0 < B < \frac{\pi}{2}$, 且 $C = \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2}$.

$\therefore B \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$, $\frac{B}{2} \in (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4})$, $\tan \frac{B}{2} \in (2 - \sqrt{3}, 1)$.

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2\tan \frac{B}{2}} \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + \sqrt{3})$.

.....11分

$\therefore a + c \in (\frac{\sqrt{3} + 1}{2}, 2 + \sqrt{3})$.

综上, $a + c$ 的取值范围为 $(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}, 2 + \sqrt{3})$.

.....12分

20. 解:(I) 由题知, 动点 C 的轨迹是以 F 为焦点, $x = -1$ 为准线的抛物线.

.....2分

\therefore 动点 C 的轨迹方程为 $y^2 = 4x$.

.....4分

(II) 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases} y = x + m, \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 消去 x , 得 $y^2 - 4y + 4m = 0$.

由 $\Delta = 16 - 16m > 0$, 得 $m < 1$.

$\therefore y_1 + y_2 = 4, y_1 y_2 = 4m.$ 6分

由 $\triangle FPQ$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \cdot |PQ| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+1} \cdot |y_1 - y_2| \cdot \frac{|1+m|}{\sqrt{2}},$ 7分

$\therefore |1+m| \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = 4.$ 9分

$\therefore |1+m| \sqrt{16-16m} = 4,$ 即 $m(m^2 + m - 1) = 0.$

$\therefore m < 1,$

$\therefore m = 0$ 或 $m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$ 11分

\therefore 直线 l 的方程为 $y = x$ 或 $y = x + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 或 $y = x + \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$ 12分

21. 解:(I) $\therefore f'(x) = 2e^x - e,$ 1分

当 $x \in (-\infty, 1 - \ln 2)$ 时, $f'(x) < 0,$ $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1 - \ln 2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0,$ $f(x)$ 单调递增.2分

$\therefore f(x)$ 的单减区间为 $(-\infty, 1 - \ln 2),$ 单增区间为 $(1 - \ln 2, +\infty).$ 3分

(II) 设函数 $h(x) = 2e^x - ex - e(\ln x + 1),$

$\therefore h'(x) = 2e^x - e - \frac{e}{x}.$

由 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $h'(1) = 0.$ 5分

\therefore 当 $x \in (0, 1), h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty), h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增.

$\therefore h(x)_{\min} = h(1) = 0.$ 7分

$\therefore 2e^x - ex - e(\ln x + 1) \geq 0,$ 当且仅当 $x = 1$ 时等号成立.

即 $f(x) \geq e(\ln x + 1),$ 当且仅当 $x = 1$ 时等号成立.9分

$\therefore 1 \geq \cos x,$

$\therefore f(x) \geq e(\ln x + 1) \geq e(\ln x + \cos x).$ 11分

由上述不等式取等条件不能同时成立,

$\therefore f(x) > e(\ln x + \cos x)$ 得证.12分

22. 解:(I) \therefore 当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时, 直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases},$ 1分

化简得直线 C_1 的普通方程为 $\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0.$ 3分

(II) \therefore 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos 2\theta = 2,$

$\therefore \rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta = 2.$ 4分

$\therefore x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta,$

\therefore 曲线 C_2 的普通方程为 $x^2 - y^2 = 2.$ 5分

将直线 C_1 的参数方程 $\begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ 代入 $x^2 - y^2 = 2$ 得 $t^2 \cos 2\alpha + 4t \cos \alpha + 2 = 0.$

$\therefore \cos 2\alpha \neq 0$, 可得 $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, $\Delta = 16 \cos^2 \alpha - 8 \cos 2\alpha = 8 > 0$.

设 A, B 两点对应的参数分别为 t_1, t_2 , 则 $t_1 + t_2 = -\frac{4 \cos \alpha}{\cos 2\alpha}$, $t_1 t_2 = \frac{2}{\cos 2\alpha}$7分

$\therefore |PA| \cdot |PB| = |t_1 t_2| = \left| \frac{2}{\cos 2\alpha} \right| = 4$8分

$\therefore 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{3}$10分

23. 解: (I) 当 $a = 4$ 时, $f(x) = |2x - 4| + |x + 1|$1分

① 当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = 3x - 3 \geq 7$, 解得 $x \geq \frac{10}{3}$;2分

② 当 $x \leq -1$ 时, $f(x) = 3 - 3x \geq 7$, 解得 $x \leq -\frac{4}{3}$;3分

③ 当 $-1 < x < 2$ 时, $f(x) = -x + 5 \geq 7$, 解得 $x \leq -2$, 不合题意.4分

综上, 不等式 $f(x) \geq 7$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{4}{3}] \cup [\frac{10}{3}, +\infty)$5分

(II) 由题, ① 当 $a < 0$ 时, $f(x) > 2a$ 显然成立.6分

② 当 $a \geq 0$ 时, $f(x) = |2x - a| + |x + 1| = \begin{cases} -3x + a - 1, & x \leq -1, \\ -x + a + 1, & -1 < x < \frac{a}{2}, \\ 3x - a + 1, & x \geq \frac{a}{2}. \end{cases}$ 7分

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 单减, 在 $(-1, \frac{a}{2})$ 单减, 在 $[\frac{a}{2}, +\infty)$ 单调递增.

$\therefore f(x)_{\min} = f(\frac{a}{2}) = \frac{a}{2} + 1$8分

由 $f(x) > 2a$ 恒成立, 故 $f(x)_{\min} = \frac{a}{2} + 1 > 2a$, 解得 $a < \frac{2}{3}$.

$\therefore 0 \leq a < \frac{2}{3}$9分

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, \frac{2}{3})$10分