绵阳市高中 2020 级第二次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．

DACBD　ABCAD　CA

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．9　　14．$\frac{1}{3}$　　15．5　　16．[1，3)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．

17．解：（1）由 $3a\cos C+a^2\sin C=3b$，

可得 $3\sin A\cos C+a\sin A\sin C=3\sin B$，……………………………………2 分

又 $3\sin B=3\sin(A+C)=3(\sin A\cos C+\cos A\sin C)$，…………………………4 分

∴ $a\sin A=3\cos A$，5 分

且 $A=\frac{\pi}{3}$，可得 $a=\sqrt{3}$；……………………………………………………6 分

（2）由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=c\cdot b\cdot\cos(\pi-A)=-\frac{1}{2}c\cdot b=-\frac{1}{2}$，可得 $c\cdot b=1$，……………………8 分

由余弦定理 $c^2+b^2=a^2+2bc\cdot\cos A=4$．……………………………………9 分

∵ $\overrightarrow{AT}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

平方可得 $(\overrightarrow{AT})^2=\frac{1}{4}[(\overrightarrow{AB})^2+(\overrightarrow{AC})^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}]$，……………………10 分

即 $(\overrightarrow{AT})^2=\frac{1}{4}(c^2+b^2+2bc\cos A)=\frac{5}{4}$，所以 $AT=\frac{\sqrt{5}}{2}$．………………12 分

18．解：（1）因为 0.92<0.99，根据统计学相关知识，R^2 越大，意味着残差平方和 $\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y})^2$ 越小，那么拟合效果越好，因此选择非线性回归方程② $\hat{y}=\hat{m}x^2+\hat{n}$ 进行拟合更加符合问题实际．……………………………………………………………………4 分

（2）令 $u_i=x_i^2$，则先求出线性回归方程：$\hat{y}=\hat{m}u+\hat{n}$，……………………………5 分

∵ $\overline{u}=\frac{1+4+9+16+25}{5}=11$，$\overline{y}=\frac{0.8+1.1+1.5+2.4+3.7}{5}=1.9$，……………………7 分

$\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2=(1-11)^2+(4-11)^2+(9-11)^2+(16-11)^2+(25-11)^2$ =374，…………9 分

∴ $\hat{m}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2}=\frac{45.1}{374}\approx 0.121$，……………………………………10 分

由$1.9=0.121\times 11+\hat{n}$，得$\hat{n}=0.569\approx 0.57$，…………………………………………… 11 分

即$\hat{y}=0.12u+0.57$，

∴所求非线性回归方程为：$\hat{y}=0.12x^2+0.57$．…………………………………………… 12 分

19．**解**：设$\{b_n\}$的公比为q，则$b_3=b_1\cdot q^2$，所以$\frac{8}{27}=\frac{2}{3}q^2$，

所以$q=\pm\frac{2}{3}$，………………………………………………………………………………2 分

因为$\{b_n\}$的各项都为正，所以取$q=\frac{2}{3}$，……………………………………………3 分

所以$b_n=(\frac{2}{3})^n$．…………………………………………………………………………4 分

若选①：由$2a_n-S_n=1(n\geq 1)$，得$2a_{n-1}-S_{n-1}=1(n\geqslant 2)$，………………………… 5 分

两式相减得：$2a_n-2a_{n-1}-a_n=0$，整理得$a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$，…………………… 6 分

因为$a_1=1\neq 0$，所以$\{a_n\}$是公比为 2，首项为 1 的等比数列，……………… 7 分

∴ $a_n=2^{n-1}$，………………………………………………………………………………… 8 分

∴ $a_nb_n=\frac{1}{2}\times(\frac{4}{3})^n$，……………………………………………………………………9 分

∵ $y=\frac{1}{2}\cdot(\frac{4}{3})^x$在 **R** 上为增函数，…………………………………………………10 分

∴数列$\{a_nb_n\}$单调递增，没有最大值，…………………………………………………… 11 分

∴不存在$m\in N^*$，使得对任意的$n\in N^*$，$a_nb_n\leqslant a_mb_m$恒成立．………………… 12 分

若选择②：因为$a_{n+1}\cdot a_{n-1}=a_n^{\ 2}(n\geq 2)$，且$a_1\neq 0$，$a_2\neq 0$，

∴ $\{a_n\}$为等比数列，……………………………………………………………………………6 分

公比$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{4}$，………………………………………………………………………7 分

∴ $a_n=(\frac{1}{4})^{n-1}$，……………………………………………………………………………8 分

所以$a_nb_n=(\frac{1}{4})^{n-1}\cdot(\frac{2}{3})^n=4\cdot\frac{2^{-n}}{3^n}=4\cdot(\frac{1}{6})^n\leqslant 4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$．………………………………10 分

当且仅当$n=1$时取得最大值$\frac{2}{3}$，…………………………………………………………… 11 分

∴存在$m=1$，使得对任意的$n\in N^*$，$a_nb_n\leqslant a_mb_m$恒成立．………………………… 12 分

若选择③：因为$a_n-1=a_{n-1}$，所以$a_n-a_{n-1}=1\ (n\geqslant 2)$，…………………………5 分

∴ $\{a_n\}$是以 1 为公差的等差数列，又$a_1=1$，……………………………………………6 分

∴ $a_n=n$，所以$a_nb_n=n\cdot(\frac{2}{3})^n$，…………………………………………………………… 8 分

设 $c_n=a_nb_n$，则 $c_n-c_{n-1}=n\cdot(\frac{2}{3})^n-(n-1)\cdot(\frac{2}{3})^{n-1}=\frac{3-n}{3}\cdot(\frac{2}{3})^{n-1}$，…………………9 分

∴当 $n<3$ 时，$c_n-c_{n-1}>0$，所以 $c_n>c_{n-1}$，

当 $n=3$ 时，$c_n-c_{n-1}=0$，所以 $c_n=c_{n-1}$，

当 $n>3$ 时，$c_n-c_{n-1}<0$，所以 $c_n<c_{n-1}$，

则 $c_1<c_2=c_3>c_4>c_5>\cdots$，…………………………………………………… 11 分

∴存在 $m=2$ 或 3，使得对任意的 $n\in N^*$，$a_nb_n\leqslant a_mb_m$ 恒成立．………………… 12 分

20．**解**：（1）设 $B(x_1,\ y_1)$，$C(x_2,\ y_2)$，

直线 BC 的方程为：$x=my+4\ (m=\frac{1}{k})$，…………………………………………1 分

联立 $\begin{cases}x=my+4\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消 x 整理得：$(3m^2+4)y^2+24my+36=0$，………………… 2 分

$$\therefore\ y_1+y_2=\frac{-24m}{3m^2+4},\quad y_1\cdot y_2=\frac{36}{3m^2+4}$$ …………………………………………………… 3 分

从而：
$$k_1\cdot k_2=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{y_1\cdot y_2}{(my_1+6)(my_2+6)}$$
$$=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+6m(y_1+y_2)+36}$$
$$=\frac{\frac{36}{3m^2+4}}{\frac{36m^2}{3m^2+4}-\frac{144m^2}{3m^2+4}+36}=\frac{1}{4}$$

∴ $k_1\cdot k_2$ 为定值 $\frac{1}{4}$．…………………………………………………………………… 5 分

（2）直线 AB 的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，………………………………………6 分

令 $x=4$，得到 $y_M=\frac{6y_1}{x_1+2}=\frac{6y_1}{my_1+6}$，…………………………………………………7 分

同理：$y_N=\frac{6y_2}{my_2+6}$．…………………………………………………………………… 8 分

从而
$$|MN|=|y_M-y_N|=|\frac{6y_1}{my_1+6}-\frac{6y_2}{my_2+6}|$$
$$=\frac{36|y_1-y_2|}{|m^2y_1y_2+6m(y_1+y_2)+36|}$$ ……………………………………………………9 分

又 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{12\sqrt{m^2-4}}{3m^2+4}$，

$|m^2y_1y_2+6m(y_1+y_2)+36|=\dfrac{144}{3m^2+4}$，…………………………………………… 10 分

所以 $|MN|=3\sqrt{m^2-4}$，…………………………………………………………… 11 分

因为：$m=\dfrac{1}{k}\in[3,4]$，所以 $|MN|\in[3\sqrt{5},6\sqrt{3}]$，

即线段 MN 长度的取值范围为 $[3\sqrt{5},6\sqrt{3}]$. ……………………………………12 分

21．**解：**（1）由 $a=1$ 时，$f'(x)=(x+1)(e^x-1)$，………………………………………1 分

由 $f'(x)>0$ 解得：$x>0$ 或 $x<-1$；由 $f'(x)<0$ 解得：$-1<x<0$.……………………… 3 分

故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，在区间 $(-1,0)$ 上单调递减.………4 分

∴$f(x)$ 的极大值是 $f(-1)=\dfrac{e-2}{2e}$，极小值是 $f(0)=0$；…………………………………5 分

（2）$f'(x)=(x+1)(e^x-a)$，$x\in[0,2]$ 时，$e^x\in[1,e^2]$，且 $f(2)=2e^2-4a$，$f(0)=0$，

$\forall x_1,x_2\in[0,2]$，恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant a+2e^2$ 等价于 $f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\leqslant a+2e^2$.

i)若 $a\leqslant1$ 时，$e^x-a\geqslant0$，故 $f'(x)\geqslant0$，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递增，故

$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=f(2)-f(0)=2e^2-4a\leqslant a+2e^2$，解得：$0\leqslant a\leqslant1$，………… 6 分

ii) 若 $a\geqslant e^2$ 时，$e^x-a\leqslant0$，故 $f'(x)\leqslant0$，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递减，故

$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=f(0)-f(2)=4a-2e^2\leqslant a+2e^2$，解得：$e^2\leqslant a\leqslant\dfrac{4}{3}e^2$，…… 7 分

iii) 若 $1<a<e^2$ 时，由 $f'(x)=(x+1)(e^x-a)>0$ 解得：$\ln a<x\leqslant2$，故 $f(x)$ 在区间 $(\ln a,2]$ 上单调递增；……………………………………………………………………………8 分

由 $f'(x)=(x+1)(e^x-a)<0$ 解得：$0\leqslant x<\ln a$，故 $f(x)$ 在区间 $[0,\ln a)$ 上单调递减.

∴ $f(x)_{\min}=f(\ln a)=-\dfrac{1}{2}a(\ln a)^2$，$f(x)_{\max}=f(2)$ 或 $f(0)$.

又 $f(2)-f(0)=2e^2-4a$，………………………………………………………………… 9 分

①当 $1<a\leqslant\dfrac{e^2}{2}$ 时，$f(2)-f(0)\geqslant0$，故

$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=f(2)-f(\ln a)=2e^2-4a+\dfrac{1}{2}a(\ln a)^2\leqslant a+2e^2$，

解得：$0<a\leqslant e^{\sqrt{10}}$，又 $1<a\leqslant\dfrac{e^2}{2}$，故此时 $1<a\leqslant\dfrac{e^2}{2}$. ……………………………10 分

②当 $\dfrac{e^2}{2}<a<e^2$ 时，$f(2)-f(0)<0$，故

$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=f(0)-f(\ln a)=\dfrac{1}{2}a(\ln a)^2\leqslant a+2e^2$，

令 $h(a)=\dfrac{1}{2}a(\ln a)^2-a-2e^2$，则 $h'(a)=\dfrac{1}{2}(\ln a)^2+\ln a-1$，又 $\ln a\in(2-\ln2,2)$，

故 $h'(a)=\frac{1}{2}(\ln a)^2+\ln a-1>0$，即 $h(a)$在区间 $(\frac{e^2}{2}，e^2)$ 上单调递增，

又 $h(e^2)=-e^2<0$，则 $\frac{1}{2}a(\ln a)^2\leqslant a+2e^2$ 恒成立. ………………………………… 11 分

综上：$0\leqslant a\leqslant\frac{4}{3}e^2$. ……………………………………………………………… 12 分

22．**解：**（1）①当 B 在线段 AO 上时，由$|OA|\cdot|OB|=4$，则 B（2，π）或（2，$\frac{3\pi}{2}$）；

②当 B 不在线段 AO 上时，设 B（ρ，θ），且满足$|OA|\cdot|OB|=4$，

$\therefore A(\frac{4}{\rho}，\theta+\pi)$，…………………………………………………………………1 分

又$\because A$ 在曲线 l 上，则 $\frac{4}{\rho}\cos(\theta+\pi)+\frac{4}{\rho}\sin(\theta+\pi)=-2$，………………………… 3 分

$\therefore\ \rho=2\sin\theta+2\cos\theta$，…………………………………………………………………… 4 分

又$\because\ \pi\leqslant\theta+\pi\leqslant\frac{3\pi}{2}$，即 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

综上所述，曲线 C 的极坐标方程为：

$\rho=2\sin\theta+2\cos\theta$（$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$），或 $\rho=2\ (\theta=\pi 或 \theta=\frac{3\pi}{2})$. ……………………………5 分

（2）①若曲线 C 为：$\rho=2\ (\theta=\pi 或 \theta=\frac{3\pi}{2})$，此时 P，Q 重合，不符合题意；

②若曲线 C 为：$\rho=2\sin\theta+2\cos\theta$（$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$），设 l_1：$\theta=\alpha$（$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$），

又 l_1 与曲线 C 交于点 P，联立 $\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho=2\sin\theta+2\cos\theta,\end{cases}$

得：$\rho_P=2\sin\alpha+2\cos\alpha$，……………………………………………………………6 分

又 l_1 与曲线 l 交于点 Q，联立 $\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho\sin\theta+\rho\cos\theta=-2,\end{cases}$

得：$\rho_Q=\frac{-2}{\sin\alpha+\cos\alpha}$，………………………………………………………………… 7 分

又$\because M$ 是 P，Q 的中点，

$\rho_M=\frac{\rho_P+\rho_Q}{2}=\sin\alpha+\cos\alpha-\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2})$，…………………………8 分

令 $\sin\alpha+\cos\alpha=t$，则 $t=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$，

又$\because\ 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$，且 $1\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$，

$\therefore \rho_M = t-\frac{1}{t}(1\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，且 $\rho_M = t-\frac{1}{t}$ 在 $\left[1,\sqrt{2}\right]$ 上是增函数，…………………… 9 分

$\therefore 0\leqslant\rho_M\leqslant\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且当 $\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 时，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时等号成立．

$\therefore |OM|$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$．…………………………………………………………10 分

23．**解**：（1）由 $f(x)\leqslant3$ 的解集为$[n，1]$，可知，1 是方程 $f(x)=3$ 的根，

$\therefore f(1)=3+|m+1|=3$，则 $m=-1$，…………………………………………………… 1 分

$\therefore f(x)=|2x+1|+|x-1|$，

①当 $x\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=-3x\leqslant3$，即 $x\geqslant-1$，解得：$-1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2}$，……………… 2 分

②当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$f(x)=x+2\leqslant3$，解得：$-\frac{1}{2}<x<1$，…………………………… 3 分

③当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=3x\leqslant3$，解得：$x=1$．……………………………………………… 4 分

综上所述：$f(x)$ 的解集为$[-1，1]$，所以 $m=-1$，$n=-1$．……………………………… 5 分

（2）由（1）可知 $m=-1$，则 $\frac{1}{2a}+\frac{2}{b}=2$．………………………………………………… 6 分

令 $\frac{1}{2a}=x$，$\frac{2}{b}=y$，则 $2a=\frac{1}{x}$，$b=\frac{2}{y}$，

又 a，b 均为正数，则 $x+y=2$（$x>0, y>0$），

由基本不等式得，$2=x+y\geqslant2\sqrt{xy}$，………………………………………………… 7 分

$\therefore xy\leqslant1$，当且仅当 $x=y=1$ 时，等号成立．

所以有 $\frac{1}{xy}\geqslant1$，当且仅当 $x=y=1$ 时，等号成立．……………………………… 8 分

又 $16a^2+b^2=4(2a)^2+b^2=\frac{4}{x^2}+\frac{4}{y^2}$

$\geqslant2\sqrt{\frac{4}{x^2}\cdot\frac{4}{y^2}}=\frac{8}{xy}$ (当且仅当 $x=y$ 时，等号成立)．……9 分

$\therefore 16a^2+b^2\geqslant8$ 成立，(当且仅当，$a=\frac{1}{2}$，$b=2$ 时等号成立)．………………… 10 分