

绵阳市高中 2020 级第二次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

DDCAA BCDBA CA

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\sqrt{2}$ 14. -1 15. -3 16. $[1, 3)$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：（1）由 $3(b - a \cos C) = a^2 \sin C$ ，及正弦定理

可得， $3 \sin B - 3 \sin A \cos C = a \sin A \sin C$ ，……………2 分

$\therefore 3 \sin B = 3 \sin(A + C) = 3 \sin A \cos C + 3 \cos A \sin C$ ……………4 分

$\therefore 3 \cos A \sin C = a \sin A \sin C$ ，……………6 分

即 $a \sin A = 3 \cos A$ ，且 $A = \frac{\pi}{3}$ ，可得 $a = \sqrt{3}$ ；……………8 分

（2）由 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = c \cdot b \cdot \cos(\pi - A) = -\frac{1}{2}c \cdot b = -\frac{1}{2}$ ，可得 $c \cdot b = 1$ ，……………10 分

由余弦定理 $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cdot \cos A = 4$ ……………12 分

18. 解：（1）由题意知， $2S_n = a_n^2 + a_n$ ，①……………1 分

当 $n=1$ 时， $2a_1 = a_1^2 + a_1$ ，则 $a_1 = 1$ ；……………2 分

当 $n \geq 2$ 时， $2S_{n-1} = a_{n-1}^2 + a_{n-1}$ ，②……………3 分

①②相减可得， $2a_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 + a_n - a_{n-1}$ ，……………4 分

$\therefore a_n + a_{n-1} = a_n^2 - a_{n-1}^2$ ，则 $a_n - a_{n-1} = 1$ ，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 1$ 为首项，1 为公差的等差数列，……………5 分

所以， $a_n = n (n \in \mathbb{N}^*)$ ……………6 分

（2） $a_n b_n = n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ，……………7 分

设 $c_n = a_n b_n$ ，则 $c_n - c_{n-1} = n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - (n-1) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{3-n}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ，……………8 分

$\therefore$ 当 $n < 3$ 时， $c_n - c_{n-1} > 0$ ，所以 $c_n > c_{n-1}$ ，……………9 分

当 $n = 3$ 时， $c_n - c_{n-1} = 0$ ，所以 $c_n = c_{n-1}$ ，……………10 分

当 $n > 3$ 时, $c_n - c_{n-1} < 0$, 所以 $c_n < c_{n-1}$, 11 分

则 $c_1 < c_2 = c_3 > c_4 > c_5 > \dots$,

$\therefore$ 存在 $m = 2$ 或 3 , 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n b_n \leq a_m b_m$ 恒成立. 12 分

19. 解: (1) 因为 $0.92 < 0.99$, 根据统计学相关知识, R^2 越大, 意味着残差平方和 $\sum_{i=1}^5 (y_i - \hat{y})^2$

越小, 那么拟合效果越好, 因此选择非线性回归方程② $\hat{y} = \hat{m}x^2 + \hat{n}$

进行拟合更加符合问题实际. 4 分

(2) 令 $u_i = x_i^2$, 则先求出线性回归方程: $\hat{y} = \hat{m}u + \hat{n}$, 5 分

$$\therefore \bar{u} = \frac{1+4+9+16+25}{5} = 11, \bar{y} = \frac{0.8+1.1+1.5+2.4+3.7}{5} = 1.9, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2 = (1-11)^2 + (4-11)^2 + (9-11)^2 + (16-11)^2 + (25-11)^2 = 374, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore \hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} = \frac{45.1}{374} \approx 0.121, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由 } 1.9 = 0.121 \times 11 + \hat{n}, \text{ 得 } \hat{n} = 0.569 \approx 0.57,$$

$$\text{即 } \hat{y} = 0.12u + 0.57, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{所求非线性回归方程为: } \hat{y} = 0.12x^2 + 0.57. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) 设 $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$,

直线 BC 的方程为: $x = my + 4$, 其中 $m = \frac{1}{k}$, 1 分

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + 4 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 消 } x \text{ 整理得: } (3m^2 + 4)y^2 + 24my + 36 = 0, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以: } y_1 + y_2 = \frac{-24m}{3m^2 + 4}, y_1 \cdot y_2 = \frac{36}{3m^2 + 4}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } k_1 \cdot k_2 &= \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 + 2} = \frac{y_1 \cdot y_2}{(my_1 + 6)(my_2 + 6)} \\ &= \frac{y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 + 6m(y_1 + y_2) + 36} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{36}{3m^2+4}}{\frac{36m^2}{3m^2+4} - \frac{144m^2}{3m^2+4} + 36} = \frac{1}{4}$$

所以: $k_1 \cdot k_2$ 为定值 $\frac{1}{4}$ 5 分

(2) 直线 AB 的方程为: $y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$, 6 分

令 $x=4$, 得到 $y_M = \frac{6y_1}{x_1+2} = \frac{6y_1}{my_1+6}$, 7 分

同理: $y_N = \frac{6y_2}{my_2+6}$ 8 分

从而 $|MN| = |y_M - y_N| = \left| \frac{6y_1}{my_1+6} - \frac{6y_2}{my_2+6} \right|$
 $= \frac{36|y_1 - y_2|}{|m^2y_1y_2 + 6m(y_1 + y_2) + 36|}$ 9 分

又 $|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \frac{12\sqrt{m^2-4}}{3m^2+4}$,

$|m^2y_1y_2 + 6m(y_1 + y_2) + 36| = \frac{144}{3m^2+4}$, 10 分

所以 $|MN| = 3\sqrt{m^2-4}$, 11 分

因为: $m = \frac{1}{k} \in [3, 4]$, 所以 $|MN| \in [3\sqrt{5}, 6\sqrt{3}]$,

即线段 MN 长度的取值范围为 $[3\sqrt{5}, 6\sqrt{3}]$ 12 分

21. 解: (1) 解: (1) $a=2$ 时, $f(x) = \ln x + x^2 - 3x + 2$,

$f'(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, 2 分

由 $f'(x) > 0$ 解得: $x > 1$ 或 $0 < x < \frac{1}{2}$; 由 $f'(x) < 0$ 解得: $\frac{1}{2} < x < 1$ 3 分

故 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$, $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上单调递减. 4 分

所以 $f(x)$ 的极大值是 $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \ln 2$, 极小值是 $f(1) = 0$; 5 分

(2) $f'(x) = \frac{ax^2 - (a+1)x + 1}{x} = \frac{(ax-1)(x-1)}{x}$, 且 $x-1 \geq 0$, 6 分

①当 $a \geq 1$ 时, $ax-1 \geq 0$, $f'(x) = \frac{(ax-1)(x-1)}{x} \geq 0$,

故 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = h(a) = 0$, 7 分

②当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $ax-1 \leq 0$, $f'(x) = \frac{(ax-1)(x-1)}{x} \leq 0$,

故 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\min} = h(a) = f(2) = \frac{a}{2} + \ln 2 - 1 \geq 0$, 显然 $h(a)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2}]$ 上单调递增,

故 $h(a) \leq h(\frac{1}{2}) = \ln 2 - \frac{3}{4} < 0$ 9 分

③当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 解得: $\frac{1}{a} < x \leq 2$; 由 $f'(x) < 0$ 解得: $1 \leq x < \frac{1}{a}$.

故 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{a}, 2]$ 上单调递增, 在区间 $[1, \frac{1}{a})$ 上单调递减.

此时 $f(x)_{\min} = f(\frac{1}{a}) = h(a) = \frac{a}{2} - \ln a - \frac{1}{2a}$, 则 $h'(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} = \frac{(a-1)^2}{2a^2} \geq 0$,

故 $h(a)$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上单调递增, 故 $h(a) < h(1) = 0$ 11 分

综上: $h(a) = \begin{cases} 0, & a \geq 1 \\ \frac{a}{2} + \ln 2 - 1, & 0 < a \leq \frac{1}{2} \\ \frac{a}{2} - \ln a - \frac{1}{2a}, & \frac{1}{2} < a < 1 \end{cases}$, 且 $h(a)$ 的最大值是 0. 12 分

22. 解: (1) ①当 B 在线段 AO 上时, 由 $|OA| \cdot |OB| = 4$, 则 $B(2, \pi)$ 或 $(2, \frac{3\pi}{2})$;

②当 B 不在线段 AO 上时, 设 $B(\rho, \theta)$, 且满足 $|OA| \cdot |OB| = 4$,

$\therefore A(\frac{4}{\rho}, \theta + \pi)$, 1 分

又 $\because A$ 在曲线 l 上, 则 $\frac{4}{\rho} \cos(\theta + \pi) + \frac{4}{\rho} \sin(\theta + \pi) = -2$, 3 分

$\therefore \rho = 2 \sin \theta + 2 \cos \theta$, 4 分

又 $\because \pi \leq \theta + \pi \leq \frac{3\pi}{2}$, 即 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

综上所述, 曲线 C 的极坐标方程为:

$$\rho = 2\sin\theta + 2\cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}), \text{ 或 } \rho = 2 \quad (\theta = \pi \text{ 或 } \theta = \frac{3\pi}{2}). \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) ①若曲线 C 为: $\rho = 2 \quad (\theta = \pi \text{ 或 } \theta = \frac{3\pi}{2})$, 此时 P, Q 重合, 不符合题意;

②设 $l_1: \theta = \alpha \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$,

又 l_1 与曲线 C 交于点 P , 联立 $\begin{cases} \theta = \alpha, \\ \rho = 2\sin\theta + 2\cos\theta, \end{cases}$

得: $\rho_P = 2\sin\alpha + 2\cos\alpha$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

又 l_1 与曲线 l 交于点 Q , 联立 $\begin{cases} \theta = \alpha, \\ \rho\sin\theta + \rho\cos\theta = -2, \end{cases}$

得: $\rho_Q = \frac{-2}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

又 $\because M$ 是 P, Q 的中点,

$$\rho_M = \frac{\rho_P + \rho_Q}{2} = \sin\alpha + \cos\alpha - \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha} \quad (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

令 $\sin\alpha + \cos\alpha = t$, 则 $t = \sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$,

又 $\because 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{\pi}{4} \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$, 且 $1 \leq t \leq \sqrt{2}$,

$\therefore \rho_M = t - \frac{1}{t} \quad (1 \leq t \leq \sqrt{2})$, 且 $\rho_M = t - \frac{1}{t}$ 在 $[1, \sqrt{2}]$ 上是增函数, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$\therefore \rho_M \leq \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且当 $\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时等号成立.

$\therefore |OM|$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

23. 解: (1) 由 $f(x) \leq 3$ 的解集为 $[n, 1]$, 可知, 1 是方程 $f(x) = 3$ 的根,

$\therefore f(1) = 3 + |m+1| = 3$, 则 $m = -1$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$\therefore f(x) = |2x+1| + |x-1|$,

①当 $x \leq -\frac{1}{2}$ 时, $f(x) = -3x \leq 3$, 即 $x \geq -1$, 解得: $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

②当 $-\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $f(x) = x+2 \leq 3$, 解得: $-\frac{1}{2} < x < 1$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

③当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = 3x \leq 3$, 解得: $x = 1$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

综上所述: $f(x)$ 的解集为 $[-1, 1]$, 所以 $m = -1, n = -1$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 可知 $m=-1$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{2}{b} = 2$ 6 分

$$\text{令 } \frac{1}{2a} = x, \frac{2}{b} = y, \text{ 则 } 2a = \frac{1}{x}, b = \frac{2}{y},$$

又 a, b 均为正数, 则 $x + y = 2$ ($x > 0, y > 0$),

由基本不等式得, $2 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$, 7 分

$\therefore xy \leq 1$, 当且仅当, $x=y=1$ 时等号成立.

所以有 $\frac{1}{xy} \geq 1$, 当且仅当, $x=y=1$ 时等号成立. 8 分

$$\text{又 } 16a^2 + b^2 = 4(2a)^2 + b^2 = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{4}{x^2} \cdot \frac{4}{y^2}} = \frac{8}{xy} \text{ (当且仅当, } x=y \text{ 时等号成立). 9 分}$$

$\therefore 16a^2 + b^2 \geq 8$ 成立, (当且仅当, $a = \frac{1}{2}, b = 2$ 时等号成立). 10 分