成都市 2019 级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷　(选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. A;　2. A;　3. D;　4. B;　5. C;　6. B;　7. C;　8. D;　9. C;　10. D;　11. B;　12. B.

第Ⅱ卷　(非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\frac{1}{2}$;　　14. $\frac{4}{3}$;　　15. $(1,+\infty)$;　　16. ①③④.

三、解答题:(共 70 分)

17. **解:**(Ⅰ)由茎叶图可知成绩在[60,70)中的频数为 3.

结合频率分布直方图,得 $n=\frac{3}{0.0075\times10}=40$.　　……2 分

$\therefore x=\frac{1}{10n}=\frac{1}{400}=0.0025$.　　……3 分

$\therefore y=\frac{1}{10}-x-0.0075-0.0200-0.0300=0.0400$.　　……5 分

(Ⅱ)由题意,本次竞赛成绩样本中分数在[70,80)中的学生有 $40\times0.04\times10=16$ 名,

分数在[80,90)中的学生有 $40\times0.03\times10=12$ 名,

分数在[90,100]中的学生有 $40\times0.02\times10=8$ 名.　　……7 分

按分层抽样抽取的 9 名学生中,分数在[70,80)中的学生有 $9\times\frac{16}{16+12+8}=4$ 名,

分数在[80,90)中的学生有 $9\times\frac{12}{16+12+8}=3$ 名,

分数在[90,100]中的学生有 $9\times\frac{8}{16+12+8}=2$ 名.　　……9 分

∴从这 9 名学生中随机选取 2 名学生的情况种数 $m=C_9^2=36$.　　……10 分

又所选 2 名学生中恰好有 1 名学生的分数在[70,80)中的情况种数 $n=C_4^1C_5^1=20$,

……11 分

∴所选 2 名学生中恰好有 1 名学生的分数在[70,80)中的概率 $P=\frac{n}{m}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$.

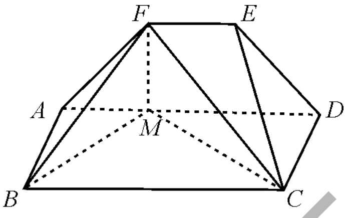
……12 分

18. **解:**(Ⅰ)如图,过点 F 作 AD 的垂线,垂足为 M,连接 MB,MC.

∵四边形 $ADEF$ 为等腰梯形,$AD=3$,$DE=\sqrt{2}$,$EF=1$,

$\therefore AM=MF=1$,$MD=2$.　　……2 分

∵平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADEF\cap$ 平面 $ABCD=AD$，



$FM\subset$ 平面 $ADEF$，$FM\perp AD$，

∴$FM\perp$ 平面 $ABCD$.

∴$FM\perp MB$，$FM\perp MC$.

∵四边形 $ABCD$ 为矩形，$AB=1$，$BC=3$，

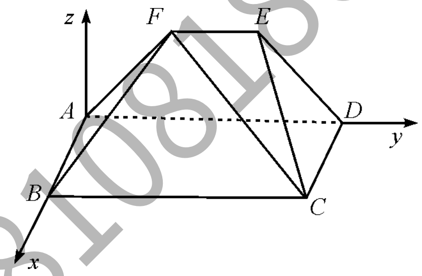
∴$BM=\sqrt{2}$，$CM=\sqrt{5}$，$BF=\sqrt{3}$，$CF=\sqrt{6}$. ……4 分

∵$BF^2+CF^2=BC^2$，∴$BF\perp CF$. ……6 分

（Ⅱ）以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴的正方向，以过点 A 垂直于平面 $ABCD$ 且向上的方向为 z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$.

则 $B(1,0,0)$，$C(1,3,0)$，$D(0,3,0)$，$E(0,2,1)$，$F(0,1,1)$.

∴$\overrightarrow{AF}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,-1,1)$，$\overrightarrow{EF}=(0,-1,0)$.



……7 分

设平面 CEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y=0,\\ -x-y+z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$. ……9 分

设直线 AF 与平面 CEF 所成的角为 θ.

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AF},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AF}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$. ……11 分

又 $\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，∴$\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

∴直线 AF 与平面 CEF 所成角的大小为 $\dfrac{\pi}{6}$. ……12 分

19. **解**：（Ⅰ）由已知得 $2a\sin2B\sin(\dfrac{\pi}{3}-B)=\sqrt{3}b\sin A$，

∴$4a\sin B\cos B(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\dfrac{1}{2}\sin B)=\sqrt{3}b\sin A$. ……2 分

由正弦定理，得 $2\sqrt{3}\sin A\sin B\cos^2B-2\sin A\sin^2B\cos B=\sqrt{3}\sin B\sin A$.

∵$A,B\in(0,\pi)$，∴$\sin A\sin B\neq0$.

∴$2\sqrt{3}\cos^2B-2\sin B\cos B=\sqrt{3}$. ……4 分

∴$\sqrt{3}\cos2B=\sin2B$，即 $\tan2B=\sqrt{3}$. ……5 分

∵$B\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，∴$2B\in(\pi,2\pi)$. ∴$2B=\dfrac{4\pi}{3}$，即 $B=\dfrac{2\pi}{3}$. ……6 分

（Ⅱ）由题意，得 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$. ……7 分

∵$AC=4AD$，

∴$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{4}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. ……9 分

∴$\overrightarrow{BD}^2=(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BA})^2=\dfrac{1}{16}(\overrightarrow{BC}^2+6\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+9\overrightarrow{BA}^2)$. ……10 分

$\because B=\dfrac{2\pi}{3}, AB=4, BD=3,$

$\therefore 9=\dfrac{1}{16}(|\overrightarrow{BC}|^2+6\times4\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}\cdot|\overrightarrow{BC}|+9\times16).$

$\therefore |\overrightarrow{BC}|^2-12|\overrightarrow{BC}|=0.$ ……11 分

$\because |\overrightarrow{BC}|\neq0, \therefore BC=12.$ ……12 分

20. **解**:(Ⅰ)$f'(x)=6x^2+6ax-12a^2=6(x+2a)(x-a).$ ……1 分

①若 $a>0$,当 $-2a<x<a$ 时,$f'(x)<0$;当 $x<-2a$ 或 $x>a$ 时,$f'(x)>0$. ……2 分

②若 $a=0$,恒有 $f'(x)\geqslant0$. ……3 分

③若 $a<0$,当 $a<x<-2a$ 时,$f'(x)<0$;当 $x<a$ 或 $x>-2a$ 时,$f'(x)>0$. ……4 分

综上,当 $a>0$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-2a,a)$,单调递增区间为 $(-\infty,-2a)$,$(a,+\infty)$;

当 $a=0$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$;

当 $a<0$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(a,-2a)$,单调递增区间为 $(-\infty,a)$,$(-2a,+\infty)$.

……5 分

(Ⅱ)$f(x)-g(x)=3ax^2+x^2-x-2\sin x+2.$ ……6 分

由题意,则需证明对任意 $a>0$,$x>0$,不等式 $3ax^2+x^2-x-2\sin x+2>0$ 成立.

由 $3ax^2>0$ 恒成立,只需证明对任意 $x>0$,不等式 $x^2-x\geqslant2(\sin x-1)$ 成立.

……7 分

①当 $x\geqslant1$ 时,$\because x^2-x\geqslant0$,$2(\sin x-1)\leqslant0$,

$\therefore$ 不等式 $x^2-x\geqslant2(\sin x-1)$ 成立. ……9 分

②当 $0<x<1$ 时,设 $h(x)=x^2-x-2\sin x+2$.

$\therefore h'(x)=2x-1-2\cos x$.

设 $t(x)=2x-1-2\cos x$.

$\therefore t'(x)=2+2\sin x$.

$\because$ 当 $0<x<1$ 时,$t'(x)>0$ 恒成立,函数 $t(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,

$\therefore t(x)<t(1)=1-2\cos1<1-2\cos\dfrac{\pi}{3}=0.$ ……11 分

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时,$h'(x)<0$ 恒成立,函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,

$\therefore h(x)>h(1)=2(1-\sin1)>0$. 即不等式 $x^2-x\geqslant2(\sin x-1)$ 成立.

综上,当 $a>0$,$x>0$ 时,不等式 $3ax^2+x^2-x-2\sin x+2>0$ 成立,

即 $g(x)<f(x)$ 成立. ……12 分

21. **解**:(Ⅰ)由已知得 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$($c$ 为半焦距),$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{6}{b^2}=1$.

又 $a^2=b^2+c^2$,$\therefore a^2=12, b^2=9$. ……2 分

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{x^2}{9}=1$. ……3 分

$\therefore$ 椭圆 C 的右顶点为 $(3,0)$.

$\therefore 3+\dfrac{p}{2}=4$. 解得 $p=2$.

∴抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$. ……4 分

(Ⅱ)由题意知直线 l 的斜率存在且不为 0. 设直线 l 的方程为 $y=kx+m$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ y^2=4x \end{cases}$ 消去 y, 得 $k^2x^2+(2km-4)x+m^2=0$.

∴$\Delta_1=(2km-4)^2-4k^2m^2=-16km+16>0$, ∴$km<1$.

∴$x_1+x_2=\dfrac{4-2km}{k^2}$, $x_1x_2=\dfrac{m^2}{k^2}$. ……5 分

∴$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$$=\frac{km(4-2km)}{k^2}+2m^2=\frac{4m}{k}.$$

∴$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{m^2}{k^2}+\dfrac{4m}{k}=-4$. ……7 分

∴$(\dfrac{m}{k}+2)^2=0$, ∴$\dfrac{m}{k}=-2$. ∴$m=-2k$, 此时 $km=-2k^2<1$.

∴直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$. ……8 分

假设在 x 轴上存在点 $H(x_0,0)$, 使得 x 轴平分 $\angle MHN$. 则直线 HM 的斜率与直线 HN 的斜率之和为 0.

设 $M(x_3,y_3)$, $N(x_4,y_4)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-2), \\ \dfrac{y^2}{12}+\dfrac{x^2}{9}=1 \end{cases}$ 消去 y, 得 $(3k^2+4)x^2-12k^2x+12k^2-36=0$.

∴$\Delta_2=(12k^2)^2-4(3k^2+4)(12k^2-36)>0$, 即 $5k^2+12>0$ 恒成立.

∴$x_3+x_4=\dfrac{12k^2}{3k^2+4}$, $x_3x_4=\dfrac{12k^2-36}{3k^2+4}$. ……9 分

∵$\dfrac{y_3}{x_3-x_0}+\dfrac{y_4}{x_4-x_0}=0$,

∴$k(x_3-2)(x_4-x_0)+k(x_4-2)(x_3-x_0)=0$.

∴$2x_3x_4-(x_0+2)(x_3+x_4)+4x_0=0$.

∴$\dfrac{24k^2-72}{3k^2+4}-(x_0+2)\dfrac{12k^2}{3k^2+4}+4x_0=0$. ……11 分

∴$\dfrac{16x_0-72}{3k^2+4}=0$.

解得 $x_0=\dfrac{9}{2}$.

∴在 x 轴上存在点 $H(\dfrac{9}{2},0)$, 使得 x 轴平分 $\angle MHN$. ……12 分

22. **解**:(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程得 $x^2-(2y)^2=(t+\dfrac{1}{t})^2-(t-\dfrac{1}{t})^2=4$. ……2 分

∴曲线 C 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$. ……3 分

直线 l 的极坐标方程化简为 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=4$. ……4 分

由极坐标与直角坐标的互化关系 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

得直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-4=0$. ……5 分

(Ⅱ)设直线 l 的参数方程为$\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}m, \\ y=4+\dfrac{\sqrt{2}}{2}m \end{cases}$($m$ 为参数). ……6 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程，整理可得

$3m^2+32\sqrt{2}m+136=0$. …(*)

$\Delta=(32\sqrt{2})^2-4\times3\times136=416>0$.

设 m_1, m_2 是方程(*)的两个实数根.

则 $m_1+m_2=-\dfrac{32\sqrt{2}}{3}, m_1m_2=\dfrac{136}{3}>0$. ……8 分

$\therefore |PA|+|PB|=|m_1|+|m_2|=|m_1+m_2|=\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$. ……10 分

23. **解**:(Ⅰ)由 $f(x)<3$,有 $|x^2-x|+1<3$. ……1 分

$\therefore |x^2-x|<2$,即 $-2<x^2-x<2$. ……3 分

解$\begin{cases} x^2-x>-2, \\ x^2-x<2 \end{cases}$得 $-1<x<2$. ……4 分

$\therefore$不等式 $f(x)<3$ 的解集为 $(-1,2)$. ……5 分

(Ⅱ)由已知,有 $|x^2-x|+|x-2|+m+1>0$ 恒成立,

即 $-m<|x^2-x|+|x-2|+1$ 恒成立.

令 $g(x)=|x^2-x|+|x-2|+1$.

则 $g(x)=\begin{cases} x^2-2x+3, x\leqslant0; \\ -x^2+3, 0\leqslant x<1; \\ x^2-2x+3, 1\leqslant x<2; \\ x^2-1, x\geqslant2. \end{cases}$ ……7 分

$\therefore g(x)$的最小值为 2. ……9 分

$\therefore -m<2$,即 $m>-2$.

$\therefore$实数 m 的取值范围为 $(-2,+\infty)$. ……10 分