

成都市 2019 级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. A; 2. A; 3. D; 4. B; 5. C; 6. B; 7. C; 8. D; 9. C; 10. D; 11. B; 12. B.

第 II 卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\frac{1}{2}$; 14. $\frac{2}{3}$; 15. $(1, +\infty)$; 16. ①③④.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I)由茎叶图可知成绩在 $[60, 70)$ 中的频数为 3.

结合频率分布直方图,得 $n = \frac{3}{0.0075 \times 10} = 40$2 分

$\therefore x = \frac{1}{10n} = \frac{1}{400} = 0.0025$3 分

$\therefore y = \frac{1}{10} - x - 0.0075 - 0.0200 - 0.0300 = 0.0400$5 分

(II)由题意,本次竞赛成绩样本中分数在 $[80, 90)$ 中的学生有 $40 \times 0.03 \times 10 = 12$ 名,6 分

分数在 $[90, 100]$ 中的学生有 $40 \times 0.02 \times 10 = 8$ 名.7 分

按分层抽样抽取的 5 名学生中,分数在 $[80, 90)$ 中的学生有 $5 \times \frac{12}{12+8} = 3$ 名,记为 A_1, A_2, A_3 ;

分数在 $[90, 100]$ 中的学生有 $5 \times \frac{8}{12+8} = 2$ 名,记为 a_1, a_29 分

从这 5 名学生中随机抽取 2 名学生的所有结果为 $(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, a_1), (A_1, a_2), (A_2, A_3), (A_2, a_1), (A_2, a_2), (A_3, a_1), (A_3, a_2), (a_1, a_2)$, 共 10 种.10 分

其中 2 名学生的分数都在 $[80, 90)$ 中的结果为 $(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_2, A_3)$. 共 3 种.11 分

$\therefore$ 所选 2 名学生的分数都在 $[80, 90)$ 中的概率 $P = \frac{3}{10}$12 分

18. 解:(I)如图,过点 F 作 AD 的垂线,垂足为 M,连接 MB, MC.

$\therefore$ 四边形 ADEF 为等腰梯形, $AD = 3, DE = \sqrt{2}, EF = 1$,

$\therefore AM = MF = 1, MD = 2$2 分

∵平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ADEF \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

$FM \subset$ 平面 $ADEF$, $FM \perp AD$,

∴ $FM \perp$ 平面 $ABCD$.

∴ $FM \perp MB$, $FM \perp MC$.

∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形, $AB=1$, $BC=3$,

∴ $BM=\sqrt{2}$, $CM=\sqrt{5}$, $BF=\sqrt{3}$, $CF=\sqrt{6}$4 分

∵ $BF^2 + CF^2 = BC^2$, ∴ $BF \perp CF$6 分

(Ⅱ) 如图, 连接 AC .

∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形, ∴ $CD \perp AD$.

∵ 平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ADEF \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $CD \subset$ 平面 $ABCD$,

∴ $CD \perp$ 平面 $ADEF$8 分

结合(Ⅰ)可知

$$V_{ABCDEF} = V_{C-ADEF} + V_{F-ABC} = \frac{1}{3} S_{\text{梯形} ADEF} \cdot CD + \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot FM. \quad \text{.....10 分}$$

$$\therefore V_{ABCDEF} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1 \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 3 \times 1 = \frac{7}{6}. \quad \text{.....12 分}$$

19. 解: (Ⅰ) 由已知得 $2a \sin 2B \sin(\frac{\pi}{3} - B) = \sqrt{3} b \sin A$,

$$\therefore 4a \sin B \cos B (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B - \frac{1}{2} \sin B) = \sqrt{3} b \sin A. \quad \text{.....2 分}$$

由正弦定理, 得 $2\sqrt{3} \sin A \sin B \cos^2 B - 2 \sin A \sin^2 B \cos B = \sqrt{3} \sin B \sin A$.

∵ $A, B \in (0, \pi)$, ∴ $\sin A \sin B \neq 0$.

$$\therefore 2\sqrt{3} \cos^2 B - 2 \sin B \cos B = \sqrt{3}. \quad \text{.....4 分}$$

$$\therefore \sqrt{3} \cos 2B = \sin 2B, \text{ 即 } \tan 2B = \sqrt{3}. \quad \text{.....5 分}$$

$$\therefore B \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \therefore 2B \in (\pi, 2\pi). \therefore 2B = \frac{4\pi}{3}, \text{ 即 } B = \frac{2\pi}{3}. \quad \text{.....6 分}$$

(Ⅱ) 由题意, 得 $\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD}$7 分

∵ $AC = 4AD$,

$$\therefore \vec{BD} = \vec{BC} + \frac{3}{4} \vec{CA} = \vec{BC} + \frac{3}{4} (\vec{BA} - \vec{BC}) = \frac{1}{4} \vec{BC} + \frac{3}{4} \vec{BA}. \quad \text{.....9 分}$$

$$\therefore \vec{BD}^2 = (\frac{1}{4} \vec{BC} + \frac{3}{4} \vec{BA})^2 = \frac{1}{16} (\vec{BC}^2 + 6 \vec{BA} \cdot \vec{BC} + 9 \vec{BA}^2). \quad \text{.....10 分}$$

$$\therefore B = \frac{2\pi}{3}, AB = 4, BD = 3,$$

$$\therefore 9 = \frac{1}{16} (|\vec{BC}|^2 + 6 \times 4 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \cdot |\vec{BC}| + 9 \times 16).$$

$$\therefore |\vec{BC}|^2 - 12 |\vec{BC}| = 0. \quad \text{.....11 分}$$

$$\therefore |\vec{BC}| \neq 0, \therefore BC = 12. \quad \text{.....12 分}$$

20. 解: (Ⅰ) $f'(x) = 6x^2 + 6ax - 12a^2 = 6(x+2a)(x-a)$1 分

① 若 $a > 0$, 当 $-2a < x < a$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x < -2a$ 或 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$2 分

②若 $a=0$, 恒有 $f'(x) \geq 0$3 分

③若 $a < 0$, 当 $a < x < -2a$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x < a$ 或 $x > -2a$ 时, $f'(x) > 0$4 分

综上, 当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-2a, a)$, 单调递增区间为 $(-\infty, -2a)$, $(a, +\infty)$;

当 $a=0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$;

当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(a, -2a)$, 单调递增区间为 $(-\infty, a)$, $(-2a, +\infty)$5 分

(II) 由题意, 有 $a^2 < 2a$, $\therefore a \in (0, 2)$6 分

由 (I) 知

①当 $1 \leq a < 2$ 时, $f(x)$ 在 $[a^2, 2a]$ 上单调递增.

$\therefore g(a) = f(2a) = 4a^3 < 32$7 分

②当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[a^2, a]$ 上单调递减, 在 $(a, 2a]$ 上单调递增.

由 $f(2a) = 4a^3$, $0 < a < 1$, $\therefore 0 < f(2a) < 4$;9 分

又 $f(a^2) = 2a^6 + 3a^5 - 12a^4 = a^4(2a^2 + 3a - 12)$.

$\therefore 0 < a < 1$, $\therefore 2a^2 + 3a - 12 < 0$. $\therefore f(a^2) < 0$11 分

$\therefore g(a) = f(2a) = 4a^3 < 4 < 32$.

综上, 有 $g(a) < 32$12 分

21. 解: (I) 由已知得 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ (c 为半焦距), $\frac{4}{a^2} + \frac{6}{b^2} = 1$.

又 $a^2 = b^2 + c^2$, $\therefore a^2 = 12, b^2 = 9$2 分

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{y^2}{12} + \frac{x^2}{9} = 1$3 分

$\therefore$ 椭圆 C 的右顶点为 $(3, 0)$.

$\therefore 3 + \frac{p}{2} = 4$. 解得 $p = 2$.

$\therefore$ 抛物线 E 的方程为 $y^2 = 4x$4 分

(II) 由题意知直线 l 的斜率存在且不为 0. 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 消去 y , 得 $k^2 x^2 + (2km - 4)x + m^2 = 0$.

$\therefore \Delta_1 = (2km - 4)^2 - 4k^2 m^2 = -16km + 16 > 0$, $\therefore km < 1$.

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4 - 2km}{k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{m^2}{k^2}$5 分

$\therefore y_1 y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2$
 $= \frac{km(4 - 2km)}{k^2} + 2m^2 = \frac{4m}{k}$.

$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{m^2}{k^2} + \frac{4m}{k} = -4$7 分

$\therefore (\frac{m}{k} + 2)^2 = 0$, $\therefore \frac{m}{k} = -2$. $\therefore m = -2k$, 此时 $km = -2k^2 < 1$.

∴ 直线 l 的方程为 $y = k(x - 2)$8 分

假设在 x 轴上存在点 $H(x_0, 0)$, 使得 x 轴平分 $\angle MHN$. 则直线 HM 的斜率与直线 HN 的斜率之和为 0.

设 $M(x_3, y_3), N(x_4, y_4)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x - 2), \\ \frac{y^2}{12} + \frac{x^2}{9} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } (3k^2 + 4)x^2 - 12k^2x + 12k^2 - 36 = 0.$$

∴ $\Delta_2 = (12k^2)^2 - 4(3k^2 + 4)(12k^2 - 36) > 0$, 即 $5k^2 + 12 > 0$ 恒成立.

$$\therefore x_3 + x_4 = \frac{12k^2}{3k^2 + 4}, x_3x_4 = \frac{12k^2 - 36}{3k^2 + 4}. \quad \text{.....9 分}$$

$$\therefore \frac{y_3}{x_3 - x_0} + \frac{y_4}{x_4 - x_0} = 0,$$

$$\therefore k(x_3 - 2)(x_4 - x_0) + k(x_4 - 2)(x_3 - x_0) = 0.$$

$$\therefore 2x_3x_4 - (x_0 + 2)(x_3 + x_4) + 4x_0 = 0.$$

$$\therefore \frac{24k^2 - 72}{3k^2 + 4} - (x_0 + 2) \frac{12k^2}{3k^2 + 4} + 4x_0 = 0. \quad \text{.....11 分}$$

$$\therefore \frac{16x_0 - 72}{3k^2 + 4} = 0.$$

$$\text{解得 } x_0 = \frac{9}{2}.$$

∴ 在 x 轴上存在点 $H(\frac{9}{2}, 0)$, 使得 x 轴平分 $\angle MHN$12 分

22. 解: (I) 由曲线 C 的参数方程得 $x^2 - (2y)^2 = (t + \frac{1}{t})^2 - (t - \frac{1}{t})^2 = 4$2 分

∴ 曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$3 分

直线 l 的极坐标方程化简为 $\rho \sin \theta + \rho \cos \theta = 4$4 分

由极坐标与直角坐标的互化关系 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$,

得直线 l 的直角坐标方程为 $x + y - 4 = 0$5 分

$$\text{(II) 设直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}m, \\ y = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}m \end{cases} \quad (m \text{ 为参数}). \quad \text{.....6 分}$$

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程, 整理可得

$$3m^2 + 32\sqrt{2}m + 136 = 0. \quad \dots (*)$$

$$\Delta = (32\sqrt{2})^2 - 4 \times 3 \times 136 = 416 > 0.$$

设 m_1, m_2 是方程 $(*)$ 的两个实数根.

$$\text{则 } m_1 + m_2 = -\frac{32\sqrt{2}}{3}, m_1m_2 = \frac{136}{3} > 0. \quad \text{.....8 分}$$

$$\therefore |PA| + |PB| = |m_1| + |m_2| = |m_1 + m_2| = \frac{32\sqrt{2}}{3}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. 解: (I) 由 $f(x) < 3$, 有 $|x^2 - x| + 1 < 3$. \dots\dots 1 \text{ 分}

$$\therefore |x^2 - x| < 2, \text{ 即 } -2 < x^2 - x < 2. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{解} \begin{cases} x^2 - x > -2, \\ x^2 - x < 2 \end{cases} \text{ 得 } -1 < x < 2. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

\therefore 不等式 $f(x) < 3$ 的解集为 $(-1, 2)$. \dots\dots 5 \text{ 分}

(II) 由已知, 有 $|x^2 - x| + |x - 2| + m + 1 > 0$ 恒成立,

即 $-m < |x^2 - x| + |x - 2| + 1$ 恒成立.

令 $g(x) = |x^2 - x| + |x - 2| + 1$.

$$\text{则 } g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x < 0; \\ -x^2 + 3, & 0 \leq x < 1; \\ x^2 - 2x + 3, & 1 \leq x < 2; \\ x^2 - 1, & x \geq 2. \end{cases} \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

\therefore $g(x)$ 的最小值为 2. \dots\dots 9 \text{ 分}

\therefore $-m < 2$, 即 $m > -2$.

\therefore 实数 m 的取值范围为 $(-2, +\infty)$. \dots\dots 10 \text{ 分}