

绵阳市高中 2019 级第三次诊断性考试

文科数学

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合  $A = \{x | x^2 < 1\}$ ， $B = \{x | 0 < x < 2\}$ ，则  $A \cap B =$   
A.  $(-1, 2)$  B.  $(0, 1)$  C.  $(0, 2)$  D.  $(1, 2)$
- 若复数  $z = (2-i)(4-i)$ ，则  $z$  的共轭复数为  
A.  $-7-6i$  B.  $-7+6i$  C.  $7-6i$  D.  $7+6i$
- 某车间从生产的一批产品中随机抽取了 1000 个零件进行一项质量指标的检测，整理检测结果得此质量指标的频率分布直方图如图  
所示，则下列结论错误的是  
A.  $a=0.005$   
B. 估计这批产品该项质量指标的众数为 45  
C. 估计这批产品该项质量指标的中位数为 60  
D. 从这批产品中随机选取 1 个零件，其质量指标在  $[50, 70)$  的概率约为 0.5
- 已知  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面， $m$  是一条直线，若  $\alpha \parallel \beta$ ，则“ $m \perp \alpha$ ”是“ $m \perp \beta$ ”的  
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件
- 已知函数  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ，则  
A.  $f(x)$  为奇函数 B.  $f(f(2))=1$   
C.  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增 D.  $f(x)$  的图象关于点  $(1, 1)$  对称
- 已知曲线  $y = x^3 - x^2 + x + 2$  在  $x=1$  处的切线为  $l$ ，若  $l$  与  $\odot C: x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - 5 = 0$  相切，则实数  $a =$   
A. 2 或 -3 B. -2 或 3 C. 2 D. 3

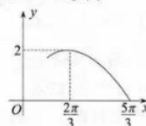
7. 函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示，则  $f(0) =$

A.  $\frac{1}{2}$

B. 1

C.  $\sqrt{2}$

D.  $\sqrt{3}$



8. 在 2022 年北京冬奥会开幕式上，二十四节气倒计时惊艳亮相，与节气相配的 14 句古诗词，将中国人独有的浪漫传达给了全世界.我国古代天文学和数学著作《周髀算经》中记载：一年有二十四个节气，每个节气的晷长损益相同（晷是按照日影测定时刻的仪器，晷长即为所测量影子的长度），二十四节气及晷长变化如图所示，相邻两个节气晷长减少或增加的量相同，周而复始.已知雨水的晷长为 9.5 尺，立冬的晷长为 10.5 尺，则冬至所对的晷长为

A. 11.5 尺

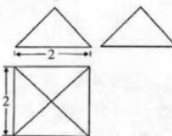
B. 13.5 尺

C. 12.5 尺

D. 14.5 尺



9. 若抛物线  $x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ ，直线  $l: y = \sqrt{3}x + \frac{p}{2}$  与抛物线交于  $A, B$  两点，且  $|AF| = 3 + |BF|$ ，则  $|AB| =$   
A.  $2\sqrt{3}$  B.  $\sqrt{3}$   
C. 2 D. 4
10. 今 4 名医生分别到  $A, B, C$  三所医院支援抗疫，每名医生只能去一所医院，且每个医院至少去一名医生，则甲、乙两医生恰好到同一医院支援的概率为  
A.  $\frac{1}{3}$  B.  $\frac{1}{4}$  C.  $\frac{1}{6}$  D.  $\frac{1}{8}$
11. 某几何体的三视图如图所示，其中正视图与侧视图均为等腰直角三角形，则该几何体的外接球的表面积为  
A.  $8\pi$  B.  $4\pi$   
C.  $12\pi$  D.  $9\pi$
12. 在给出的①  $\log_3 \pi < \frac{\pi}{3}$ ；②  $\log_3 6 > \log_3 7$ ；③  $\sqrt{e} \cdot \ln 2 < 1$  .



三个不等式中，正确的个数为

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (其中  $a > 0, b > 0$ ) 的焦距为  $4\sqrt{5}$ ，其中一条渐近线的斜率为 2，则  $a =$  \_\_\_\_\_。
14. 在等边  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 4\overline{BD}$ ，则  $\overline{AD} \cdot \overline{CA} =$  \_\_\_\_\_。
15. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，若  $a_1 = 3$ ， $a_{n+1} = S_n + 3$ ，则  $S_5 =$  \_\_\_\_\_。
16. 在棱长为 2 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中，已知点  $P$  为棱  $AA_1$  的中点，点  $Q$  为棱  $CD$  上一动点，底面正方形  $ABCD$  内的点  $M$  始终在平面  $D_1PQ$  上，则由所有满足条件的点  $M$  构成的区域的面积为 \_\_\_\_\_。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边为  $a, b, c$ ，已知  $b \cdot \cos A = 2a \cdot \cos B$ ，且  $\tan C = -3$ 。

- (1) 求角  $B$  的大小；  
(2) 若  $c = 3$ ，求  $\triangle ABC$  的面积  $S$ 。

18. (12 分)

随着科技进步，近年来，我国新能源汽车产业迅速发展。以下是中国汽车工业协会 2022 年 2 月公布的近六年我国新能源乘用车的年销售量数据：

| 年 份                | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|
| 年份代码 $x$           | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
| 新能源乘用车年销量 $y$ (万辆) | 50   | 78   | 126  | 121  | 137  | 352  |

- (1) 根据表中数据，求出  $y$  关于  $x$  的线性回归方程；(结果保留整数)  
(2) 若用  $y = me^{kx}$  模型拟合  $y$  与  $x$  的关系，可得回归方程为  $\hat{y} = e^{1.63 + 0.33x}$ ，经计算该模型和第 (1) 问中模型的  $R^2$  ( $R^2$  为相关指数) 分别为 0.87 和 0.71，请分别用这两个模型，求 2022 年我国新能源乘用车的年销售量的预测值；  
(3) 你认为 (2) 中用哪个模型得到的预测值更可靠？请说明理由。

参考数据：设  $u = \ln y$ ，其中  $u_i = \ln y_i$ 。

| $\bar{y}$ | $\bar{u}$ | $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ | $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(u_i - \bar{u})$ | $e^{5.94}$ | $e^{6.27}$ |
|-----------|-----------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------|------------|
| 144       | 4.78      | 841                                           | 5.70                                          | 380        | 528        |

参考公式：对于一组具有线性相关关系的数据  $(x_i, y_i) (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ ，其回归直线

$$\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$$

的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ 。

19. (12 分)

在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  为梯形，已知  $AD \parallel BC$ ， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $AB = BC = PA = 2AD = 2$ ， $\triangle PBC$  是以  $BC$  为斜边的等腰直角三角形。

(1) 证明： $CD \perp$  平面  $PBC$ ；

(2)  $Q$  为棱  $AB$  上一点，且三棱锥  $B-PQC$  的体积为  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ，

求  $\angle BCQ$  的大小。

20. (12 分)

函数  $f(x) = x \ln x - (a+1)x + 1$ 。

- (1) 若函数  $f(x)$  有 2 个零点，求实数  $a$  的取值范围；  
(2) 若  $f(x)$  在  $[1, e]$  上的值域为  $[-2e, -2]$ ，求实数  $a$  的值。

21. (12 分)

已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (其中  $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，直线  $y = x + m$  与椭圆  $E$  交于

$A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$  两点，且  $x_1 > x_2$ ，当  $m = 0$  时， $|AB| = \frac{2a^2}{b^2}$ 。

(1) 求椭圆  $E$  的方程；

(2) 在直线  $x = \frac{14}{3}$  上是否存在点  $P$ ，使得  $|AP| = |AB|$ ， $AP \perp AB$ ，若存在，求出  $m$  的值；若不存在，请说明理由。

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题做答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22. 【选修 4—4：坐标系与参数方程】(10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中，直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \end{cases}$  ( $t$  为参数)，曲线  $C$  的方程为

$x^2 + y^2 = |x| + |y|$ 。以坐标原点为极点， $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系，射线  $E$  的极坐标方程为  $\theta = \alpha$ ， $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 。

(1) 求直线  $l$  的普通方程和曲线  $C$  的极坐标方程；

(2) 若  $E$  与  $l$  交于点  $A$ ， $E$  与  $C$  交于点  $B$ ，求  $\frac{|OA|}{|OB|}$  的取值范围。

23. 【选修 4—5：不等式选讲】(10 分)

已知函数  $f(x) = |x|$ 。

(1) 求关于  $x$  的不等式  $f(x-1) + f(x-2) \geq x+1$  的解集；

(2) 求证： $\frac{f(a+b)}{1+f(a+b)} \leq \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)+f(b)}$ 。

